

## Kinematika a dynamika tuhého tělesa

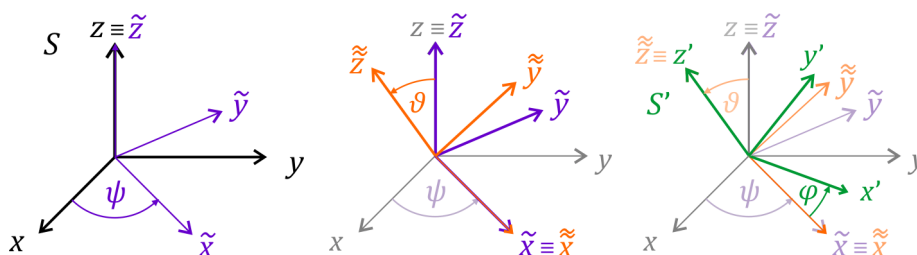
V této kapitole se soustředíme na **rotační pohyb** tuhého tělesa nebo tuhé soustavy hmotných bodů. Kinematiky tohoto pohybu se jen dotkneme; soustředíme se na základní veličiny související s dynamikou: moment hybnosti a moment setrvačnosti.

Pod pojmem rotující těleso si můžeme představit setrvačnick, třeba dětskou káču. Zdálo by se, že dětská hračka nemůže být nic komplikovaného, ovšem opak je pravdou – setrvačnick patří k nejsložitějším partiím teoretické mechaniky. V tomto textu se proto budeme věnovat jen věcem zcela základním, i tak však dojdeme k zajímavým a užitečným výsledkům.

### Otáčení tuhého tělesa kolem pevného bodu

Z úvodního kurzu mechaniky umíme popsat otáčení tělesa kolem pevné osy. Pokud osa není pevná, je popis rotačního pohybu mnohem složitější. Obecně ovšem platí, že jakoukoli rotaci tělesa kolem pevného bodu můžeme v daný okamžik popsat jako rotaci kolem osy procházející tímto bodem<sup>1</sup>.

K popisu natočení tělesa vůči inerciální (laboratorní) soustavě  $S$  se používají tzv. **Eulerovy úhly**  $\psi$ ,  $\vartheta$  a  $\varphi$ . Jejich význam ukazují obrázky. Nejprve soustavu  $S$  otočíme kolem osy  $z$  o úhel  $\psi$ . (Osy otočené soustavy zde označujeme  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$ .) Potom tuto novou soustavu otočíme kolem osy  $\tilde{x}$  o úhel  $\vartheta$ . (Nové osy po otočení označujeme  $\tilde{\tilde{x}}$ ,  $\tilde{\tilde{y}}$ ,  $\tilde{\tilde{z}}$ .) A nakonec ještě soustavu otočíme kolem osy  $\tilde{\tilde{z}}$  o úhel  $\varphi$ . Výsledkem je nová soustava  $S'$ , tuto soustavu bereme jako pevně spojenou s rotujícím tělesem.



Zdá se to být složité, ale ve skutečnosti jde o docela přirozený způsob, jak popsat třeba rotující setrvačnick: Úhly  $\psi$  a  $\vartheta$  charakterizují směr rotační osy  $z'$ , kolem ní se pak setrvačnick točí, při tomto otáčení s časem roste úhel  $\varphi$ . Při obecné rotaci se ovšem s časem mění všechny tři Eulerovy úhly  $\psi$ ,  $\vartheta$  a  $\varphi$ .

Při popisu otáčení pomocí Eulerových úhlů se zdánlivě vůbec nevyskytuje úhlová rychlost. Ve skutečnosti se ovšem složky vektoru úhlové rychlosti dají jednoznačně vyjádřit pomocí Eulerových úhlů a jejich časových derivací  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\vartheta}$ ,  $\dot{\varphi}$ . Vztahy, které vyjadřují složky úhlové rychlosti, jsou známe jako **Eulerovy kinematické rovnice**.<sup>2</sup>

My v tomto textu nebudeme Eulerovy kinematické rovnice bezprostředně potřebovat, proto je zde nebudeme ani odvozovat ani konkrétně uvádět. Zmiňujeme je spíš pro úplnost; pokud byste někdy narazili na trochu složitější problém týkající se rotace těles, tak se bez jejich využití patrně neobejdete.<sup>3</sup>

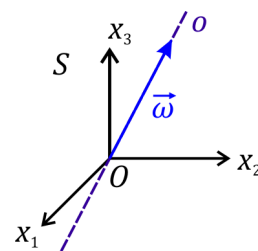
<sup>1</sup> Toto tvrzení je známo jako D'Alembertova-Eulerova věta.

<sup>2</sup> Ve skutečnosti jde o dvojice rovnice. Jedny vyjadřují složky úhlové rychlosti  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  v inerciální soustavě  $S$ , druhé dávají úhlové rychlosti  $\omega'_x$ ,  $\omega'_y$ ,  $\omega'_z$  v soustavě  $S'$  spjaté s rotujícím tělesem.

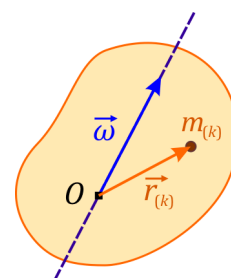
<sup>3</sup> Tak abyste věděli, co si v učebnicích vyhledat a měli alespoň základní představu o souvislosti  $\vec{\omega}$  s Eulerovými úhly.

## Moment hybnosti

Důležitou veličinou v dynamice rotujícího tělesa je **moment hybnosti**  $\vec{L}$ . V úvodním kurzu klasické mechaniky jsme se seznámili s tím, jak určit jeho složku do směru osy rotace<sup>4</sup>. Nyní se podíváme, jaké jsou všechny složky momentu hybnosti při rotaci tělesa kolem pevného bodu. Tento bod vezmeme za počátek  $O$  soustavy souřadnic; daná soustava  $S$  je nerotující, tedy inerciální. Jejich souřadnice budeme označovat  $x_1, x_2, x_3$ .



Moment hybnosti budeme počítat pro tuhou soustavu hmotných bodů.<sup>5</sup> Hmotnosti bodů budeme označovat  $m_{(k)}$ , jejich polohové vektory  $\vec{r}_{(k)}$  (a složky těchto polohových vektorů  $x_{(k)1}, x_{(k)2}, x_{(k)3}$ ), jejich rychlosti  $\vec{v}_{(k)}$ . Index  $k$  přitom čísluje hmotné body; je-li jejich celkový počet  $N$ , je  $k = 1, \dots, N$ .



Celkový moment hybnosti je dán součtem hybnosti všech hmotných bodů:

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^N \vec{L}_{(k)} \quad (9.1)$$

Moment hybnosti hmotného bodu je

$$\vec{L}_{(k)} = \vec{r}_{(k)} \times \vec{p}_{(k)} = m_{(k)} \vec{r}_{(k)} \times \vec{v}_{(k)}. \quad (9.2)$$

Pro rychlost hmotného bodu v rotujícím tělese přitom platí

$$\vec{v}_{(k)} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{(k)}. \quad (9.3)$$

Dosazení (9.3) do (9.2) dává<sup>6</sup>

$$\vec{L}_{(k)} = m_{(k)} \vec{r}_{(k)} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{(k)}) = m_{(k)} \left[ \vec{\omega} (\vec{r}_{(k)} \cdot \vec{r}_{(k)}) - \vec{r}_{(k)} (\vec{r}_{(k)} \cdot \vec{\omega}) \right]. \quad (9.4)$$

V úvodním kurzu klasické mechaniky jsme z tohoto vztahu určili průmět  $\vec{L}_{(k)}$  do směru vektoru  $\vec{\omega}$ .

Nyní určíme moment hybnosti obecně, a to ve složkách.  $i$ -tá složka (9.4) je<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} L_{(k)i} &= m_{(k)} \left[ \omega_i (\vec{r}_{(k)} \cdot \vec{r}_{(k)}) - x_{(k)i} (\vec{r}_{(k)} \cdot \vec{\omega}) \right] = \\ &= m_{(k)} \left[ \omega_i r_{(k)}^2 - x_{(k)i} \sum_{j=1}^3 (x_{(k)j} \omega_j) \right] = \sum_{j=1}^3 \left\{ m_{(k)} \left[ \delta_{ij} \omega_j r_{(k)}^2 - x_{(k)i} x_{(k)j} \omega_j \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Nyní už můžeme sečíst momenty hybnosti všech bodů, navíc  $\omega_j$  můžeme z celého vztahu vytknout:

$$L_i = \sum_{k=1}^N L_{(k)i} = \sum_{k=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^3 m_{(k)} (\delta_{ij} \omega_j r_{(k)}^2 - x_{(k)i} x_{(k)j} \omega_j) \right\} = \sum_{j=1}^3 \left\{ \left[ \sum_{k=1}^N m_{(k)} (r_{(k)}^2 \delta_{ij} - x_{(k)i} x_{(k)j}) \right] \omega_j \right\} \quad (9.6)$$

<sup>4</sup> Pro připomenutí: Tato složka je  $L = J\omega$ , kde  $J$  je moment setrvačnosti vzhledem k dané ose a  $\omega$  je úhlová rychlost.

<sup>5</sup> Tedy soustavu hmotných bodů, jejichž vzdálenosti se s časem nemění. Odvození je v tomto případě možná poněkud názornější, než v případě tuhého tělesa. Pro tuhé těleso pak jednoduše od sčítání přes všechny hmotné body přejdeme k objemovému integrálu.

<sup>6</sup> Při úpravě používáme populární vzorec „bac-cab“, tedy  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})$ .

<sup>7</sup> Při úpravě jsme využili, že lze zapsat  $\omega_i = \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} \omega_j$ .

## Tenzor setrvačnosti

Výraz v hranaté závorce v (9.6) nezávisí na úhlové rychlosti, jen na hmotnostech a polohách hmotných bodů, tedy na rozložení hmotnosti v soustavě hmotných bodů resp. v tuhém tělese. Je tedy přirozené zavést pro tento výraz speciální označení:

$$J_{ij} = \sum_{k=1}^N m_{(k)} \left( r_{(k)}^2 \delta_{ij} - x_{(k)i} x_{(k)j} \right) \quad (9.7)$$

Veličiny  $J_{ij}$  jsou složky **tenzoru setrvačnosti**. Indexy  $i$  a  $j$  mají hodnoty od 1 do 3. Složky  $J_{ij}$  mají dva indexy, jde tedy o tenzor druhého řádu.<sup>8</sup> Z (9.7) vidíme, že jde o tenzor **symetrický** (vzhledem k záměně indexů), tedy že platí

$$J_{ij} = J_{ji} \quad (9.8)$$

V případě tuhého tělesa, v němž je látka rozložena spojitě s hustotou  $\rho(\vec{r}')$ , místo sčítání přes všechny hmotné body integrujeme přes objem a složky tenzoru setrvačnosti jsou analogicky k (9.7) dány vztahem

$$J_{ij} = \int_V \rho(\vec{r}') \left( r'^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right) dV \quad (9.9)$$

Známe-li tenzor setrvačnosti, je z (9.6) vidět, že moment hybnosti je dán jednoduchým vztahem<sup>9</sup>

$$L_i = \sum_{j=1}^3 J_{ij} \omega_j \quad (9.10)$$

Pomocí tenzoru setrvačnosti lze také jednoduše vyjádřit kinetickou energii rotujícího tělesa. Je totiž<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_{(k)} v_{(k)}^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_{(k)} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{(k)}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{(k)}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_{(k)} \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_{(k)} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{(k)})) = \\ &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^N m_{(k)} (\vec{r}_{(k)} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{(k)})) \right\} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \omega_i L_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 J_{ij} \omega_i \omega_j \quad , \end{aligned}$$

kde jsme při poslední úpravě dosadili (9.10).

Je tedy

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 J_{ij} \omega_i \omega_j \quad (9.11)$$

Je užitečné porovnat vztahy, které jsme v úvodním kurzu mechaniky odvodili pro rotaci tělesa kolem pevné osy s výše odvozenými obecnými vztahy využívajícími tenzoru setrvačnosti. Vztahy (9.10)

<sup>8</sup> Tenzory jsme poznali již v úvodním kurzu mechaniky (vzpomeňte si na tenzor napětí). Obecně jde o veličiny, které mají více indexů a jejich složky se při transformaci soustavy souřadnic transformují specifickým

způsobem: Platí-li pro transformaci souřadnic  $x'_i = \sum_{l=1}^3 a_{il} x_l$ , je  $J'_{ij} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 a_{il} a_{jm} J_{lm}$ .

<sup>9</sup> Poznamenejme, že často se v zápise užívá *Einsteinovo sumační pravidlo* (sčítá se přes opakující se indexy), takže se nepíše suma a vztah (9.10) se запиše prostě  $L_i = J_{ij} \omega_j$ .

<sup>10</sup> Rychlost hmotného bodu vyjadřujeme pomocí (9.3), při úpravě smíšeného součinu používáme vztah  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$ , přitom  $\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{(k)}$ ,  $\vec{b} = \vec{\omega}$ ,  $\vec{c} = \vec{r}_{(k)}$ .

a (9.11) přitom již budeme psát pomocí Einsteinova sumačního pravidla, tedy bez explicitního vyznačení sčítání:

Rotace kolem pevné osy	Obecné vztahy (rotace kolem pevného bodu)
$L_{\vec{v}} = J \omega$	$L_i = J_{ij} \omega_j$
$T = \frac{1}{2} J \omega^2$	$T = \frac{1}{2} J_{ij} \omega_i \omega_j$

Vidíme, že obecné vztahy jsou vlastně jen přirozeným zobecněním vztahů pro rotaci kolem pevné osy.

V uvedené tabulce  $L_{\vec{v}}$  znamená průmět momentu hybnosti do směru rotační osy:

$$L_{\vec{v}} = \vec{L} \cdot \vec{v} \quad (9.12)$$

Do (9.12) můžeme ovšem dosadit z (9.10) a dospět k dalšímu zajímavému výsledku. Je totiž<sup>11</sup>

$$L_{\vec{v}} = \vec{L} \cdot \vec{v} = L_i v_i = J_{ij} \omega_j v_i = J_{ij} \omega v_j v_i = J_{ij} v_i v_j \omega .$$

Z porovnání se vztahem  $L_{\vec{v}} = J \omega$  vidíme, že **moment setrvačnosti vzhledem k ose** dané jednotkovým vektorem  $\vec{v}$  je<sup>12</sup>

$$J = J_{ij} v_i v_j \quad (9.13)$$

To znamená, že **známe-li složky tenzoru setrvačnosti** (vzhledem k danému pevnému bodu), **můžeme určit moment setrvačnosti vzhledem k libovolné ose** (procházející daným bodem).<sup>13</sup>

### Význam složek tenzoru setrvačnosti

Tenzor setrvačnosti, tak jak jsme ho zavedli, nám dosud může připadat možná trochu „abstraktně“. Podívejme se proto, jaký význam mají jeho složky, zejména *diagonální* složky, tedy složky  $J_{11}, J_{22}, J_{33}$ . Proč mluvíme o diagonálních složkách? Protože složky tenzoru můžeme zapsat do formy tabulky resp. čtvercové matice<sup>14</sup>

$$\begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix} . \quad (9.14)$$

Jaká je tedy konkrétně složka  $J_{11}$ ? Ze vztahu (9.7) pro  $i=1, j=1$  dostáváme

<sup>11</sup> Při úpravách využíváme toho, že  $\vec{\omega} = \omega \vec{v}$ . (Uvědomte si, že takto jsme v úvodním kurzu mechaniky zaváděli vektor úhlové rychlosti.)

<sup>12</sup> Psáno již opět s využitím Einsteinova sumačního pravidla.

<sup>13</sup> To není špatné, že?

<sup>14</sup> Díky (9.8) je to matice symetrická.

$$\begin{aligned}
 J_{11} &= \sum_{k=1}^N m_{(k)} \left( r_{(k)}^2 - x_{(k)1} x_{(k)1} \right) = \sum_{k=1}^N m_{(k)} \left( x_{(k)1}^2 + x_{(k)2}^2 + x_{(k)3}^2 - x_{(k)1}^2 \right) = \\
 &= \sum_{k=1}^N m_{(k)} \left( x_{(k)2}^2 + x_{(k)3}^2 \right) = \sum_{k=1}^N m_{(k)} R_{(k)}^2 = J_{\text{osa } x_1},
 \end{aligned}
 \tag{9.15}$$

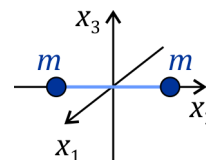
kde  $R_{(k)}$  jsou vzdálenosti bodů od osy  $x_1$ . Vidíme, že složka  $J_{11}$  tenzoru setrvačnosti je rovna momentu setrvačnosti vzhledem k ose  $x_1$ . Podobně je tomu pro složky  $J_{22}$  a  $J_{33}$ . To znamená, že

**diagonální složky tenzoru setrvačnosti jsou rovny momentům setrvačnosti vzhledem k příslušným osám.**

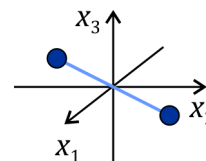
Pro nediagonální složky tenzoru setrvačnosti plyne z (9.7)

$$J_{ij} = - \sum_{k=1}^N m_{(k)} x_{(k)i} x_{(k)j}, \quad i \neq j.
 \tag{9.16}$$

Tyto složky nazýváme **deviační momenty**. Pro hmotné body symetricky rozložené vzhledem k osám souřadnic<sup>15</sup> budou deviační momenty nulové, jak ukazuje příklad na obrázku vpravo. Body na něm zobrazené tvoří „činku“. Ze vztahu (9.16) se můžeme přesvědčit, že všechny složky  $J_{12}, J_{13}, J_{23}$  jsou rovny nule. Také je zřejmé, že při rotaci kolem kterékoli z os  $x_1, x_2, x_3$  tato činka „nehází“ (ve smyslu nevyváženého kola).



Naopak, jsou-li deviační momenty nenulové, odpovídá to nevyváženému kolu, které „hází“. Příklad opět vidíme na obrázku. (Jeden bod činky je nad rovinou  $x_1, x_2$ , druhý pod ní. Představte si, že se takovýto objekt točí kolem osy  $x_3$ .<sup>16</sup>) Vidíme tedy, že deviační momenty v jistém smyslu vystihují „nevyváženost“ rotujícího tělesa.



O vyváženost či nevyváženost jde ovšem vždy vůči určitým osám.<sup>17</sup> Nešlo by vhodným natočením systému souřadnic vůči tělesu dosáhnout „vyvážení“, tedy toho, aby deviační momenty byly nulové? Opravdu to lze! Díky tomu, že tenzor setrvačnosti je symetrický, lze dokázat, že vždy existuje soustava souřadnic, v níž má pouze diagonální složky.<sup>18</sup> Osy této soustavy souřadnic se nazývají **hlavní osy tenzoru setrvačnosti**. Bývá zvykem označovat diagonální složky tenzoru setrvačnosti v této soustavě jako A, B, C:

$$J_{ij} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}
 \tag{9.17}$$

tj.  $J_{11} = A, J_{22} = B, J_{33} = C$ .

<sup>15</sup> Rozložení hmotných bodů zde popisujeme poněkud vágně, fakticky jde i o jejich hmotnosti. Z příkladů však bude jasné, co máme na mysli.

<sup>16</sup> Pokud vám představa nestačí, tak si ho prakticky sestrojte a roztočte. Budete-li osu rotace držet v ruce, ucítíte nevyváženost takového tělesa vlastníma rukama.

<sup>17</sup> V příkladě výše šlo o tutéž činku, jen byla jinak natočena vůči osám.

<sup>18</sup> Při důkazu lze využít poznatek z algebry, že každou reálnou symetrickou matici  $A$  lze transformací  $P^{-1}AP$ , kde  $P$  je ortogonální matice, převést na matici diagonální. Daná transformace je právě transformací složek tenzoru při otočení soustavy souřadnic.

## Eulerovy dynamické rovnice

Jak sestavit pohybovou rovnici pro pohyb rotujícího tělesa? Východiskem nám bude **druhá věta impulsová**:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (9.18)$$

Moment hybnosti  $\vec{L}$  rozepíšeme do složek **v soustavě  $S'$  spojené s tělesem**<sup>19 20</sup>:

$$\vec{L} = L'_i \vec{e}'_i = J'_{ij} \omega'_j \vec{e}'_i \quad (9.19)$$

Zde  $J'_{ij}$  jsou složky tenzoru setrvačnosti v soustavě  $S'$ ,  $\omega'_j$  složky úhlové rychlosti  $\vec{\omega}$  v  $S'$ . Při úpravě využíváme obecný vztah (9.10), v soustavě  $S'$  tedy  $L'_i = J'_{ij} \omega'_j$ . Protože v soustavě  $S'$  se těleso nepohybuje, jsou složky  $J'_{ij}$  **konstantní**.

$\vec{e}'_i$  jsou vektory báze soustavy  $S'$  – rotují tedy s tělesem. Pro jejich časovou změnu proto platí

$$\frac{d\vec{e}'_i}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}'_i \quad (9.20)$$

Derivací (9.19) podle času dostáváme<sup>22</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} (J'_{ij} \omega'_j \vec{e}'_i) = J'_{ij} \frac{d\omega'_j}{dt} \vec{e}'_i + J'_{ij} \omega'_j \frac{d\vec{e}'_i}{dt} = \\ &= J'_{ij} \dot{\omega}'_j \vec{e}'_i + J'_{ij} \omega'_j \vec{\omega} \times \vec{e}'_i = J'_{ij} \dot{\omega}'_j \vec{e}'_i + J'_{mj} \omega'_j \vec{\omega} \times \vec{e}'_m \end{aligned} \quad (9.21)$$

Dosažením do (9.18) získáme

$$J'_{ij} \dot{\omega}'_j \vec{e}'_i + J'_{mj} \omega'_j \vec{\omega} \times \vec{e}'_m = \vec{M} \quad (9.22)$$

Z této vektorové rovnice nyní vezmeme jen  $i$ -tou složku. Přitom pro složku vektorového součinu platí  $(\vec{\omega} \times \vec{e}'_m)_i = \varepsilon_{ikn} \omega_k (\vec{e}'_m)_n = \varepsilon_{ikn} \omega_k \delta_{mn} = \varepsilon_{ikm} \omega_k$ .<sup>23</sup>  $i$ -tá složka rovnice (9.22) v  $S'$  je tedy

$$J'_{ij} \dot{\omega}'_j + J'_{mj} \omega'_j \varepsilon_{ikm} \omega'_k = M'_i \quad (9.23)$$

<sup>19</sup> Na první pohled se zdá, že by bylo jednodušší rozepsat  $\vec{L}$  do složek v inerciální soustavě  $S$  jako  $L_i = J_{ij} \omega_j$ , rovnici (9.18) psát jako  $\frac{dL_i}{dt} = M_i$  a  $L_i$  do ní dosadit. Ovšem protože těleso rotuje (jeho pohyb může být i dost složitý), složky tenzoru setrvačnosti  $J_{ij}$  v soustavě  $S$  se *mění s časem* a tím by se vše komplikovalo. (Museli bychom explicitně zapisovat, jak se složky tenzoru setrvačnosti transformují ze soustavy tělesa do  $S$ .)

<sup>20</sup> Nadále používáme Einsteinovo sumační pravidlo, takže ve vztahu (9.19) a dalších nepíšeme  $\sum_{j=1}^3$  apod.

<sup>21</sup> Tento vztah jsme využívali v úvodním kurzu klasické mechaniky při odvozování setrvačných sil v rotujících soustavách; jde vlastně o vztah  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ , kde místo polohového vektoru  $\vec{r}$  je  $\vec{e}'_i$ .

<sup>22</sup> Při úpravách využíváme (9.20), časovou derivaci značíme tečkou nad symbolem a v posledním členu kvůli přehlednosti dalších úprav přejmenováváme index  $i$  na  $m$ .

<sup>23</sup> V úpravě využíváme vztah vyjadřující vektorový součin ve složkách:  $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ikn} a_k b_n$ , kde  $\varepsilon_{ikn}$  je Levi-Civitův symbol.

Pro přehlednost lze členy v rovnici trochu přeuspořádat:  $J'_{ij} \dot{\omega}'_j + \varepsilon_{ikm} \omega'_k J'_{mj} \omega'_j = M'_i$ , a ještě přejmenovat některé indexy, aby rovnice vypadala „hezčí“:

$$J'_{ij} \dot{\omega}'_j + \varepsilon_{ijk} \omega'_j J'_{km} \omega'_m = M'_i \quad (9.24)$$

Toto už jsou pohybové rovnice pro rotaci tuhého tělesa<sup>24</sup>. (Jde o tři rovnice, pro  $i=1, 2, 3$ .) Je ale výhodné napsat je v takové soustavě  $S'$ , v níž tenzor setrvačnosti je **diagonální** (viz (9.17)), tedy v níž platí

$$J'_{11} = A, \quad J'_{22} = B, \quad J'_{33} = C, \quad J'_{ij} = 0 \quad \text{pro } i \neq j \quad (9.25)$$

První složka ( $i=1$ ) rovnic (9.24) je pak  $J'_{11} \dot{\omega}'_1 + \varepsilon_{123} \omega'_2 J'_{33} \omega'_3 + \varepsilon_{132} \omega'_3 J'_{22} \omega'_2 = M'_1$ , po dosazení (9.25) a hodnot  $\varepsilon_{ijk}$ <sup>25</sup> dostaneme

$$A \dot{\omega}'_1 + C \omega'_2 \omega'_3 - B \omega'_3 \omega'_2 = M'_1. \quad (9.26)$$

Pro  $i=2$  a  $i=3$  dostaneme stejným způsobem další dvě rovnice; fakticky je můžeme dostat z (9.26) cyklickou záměnou. Výsledkem jsou rovnice

$\begin{aligned} A \dot{\omega}'_1 - (B - C) \omega'_2 \omega'_3 &= M'_1 \\ B \dot{\omega}'_2 - (C - A) \omega'_3 \omega'_1 &= M'_2 \\ C \dot{\omega}'_3 - (A - B) \omega'_1 \omega'_2 &= M'_3 \end{aligned}$	(9.27)
---	--------

známé jako **Eulerovy dynamické rovnice**.

Pokud bychom chtěli určit pohyb rotujícího tělesa obecně, dosadili bychom za složky  $\omega'_i$  z Eulerových kinematických rovnic a získali bychom pohybové rovnice pro Eulerovy úhly.<sup>26</sup> Naštěstí v některých případech lze Eulerovy rovnice řešit i jednodušeji, jak ukáže následující příklad.

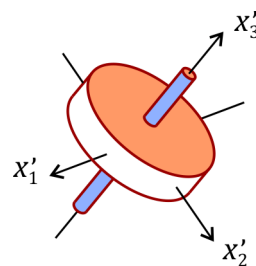
<sup>24</sup> My zde tuto rovnici důsledně píšeme s čárkami u všech veličin, abychom zdůraznili, že jde o složky v soustavě  $S'$  spojené s tělesem. V řadě učebnic se v některé fázi odvození „pro stručnost“ čárky přestanou psát; někdy dokonce bez výrazného upozornění. Buďte si toho vědomi, pokud budete porovnávat naše odvození s příslušnými partiemi v učebnicích teoretické mechaniky.

<sup>25</sup> Připomeňme, že  $\varepsilon_{123} = +1$  a  $\varepsilon_{132} = -1$ .

<sup>26</sup> Obecně by ale vyšla soustava nelineárních navzájem provázaných rovnic. Ta by šla řešit numericky pomocí počítače, ale analyticky, tj. s tužkou a papírem, můžeme doufat v řešení maximálně ve speciálních případech. Jak už jsme konstatovali výše, setrvačnický jsou jednou z nejsložitějších partií klasické mechaniky...

### Příklad: Volný symetrický setrvačnick

Uvažujme setrvačnick, jehož momenty setrvačnosti vzhledem k osám  $x'_1$  a  $x'_2$  jsou stejné, tedy  $A = B$ . Může jít například o setrvačnick zobrazený na obrázku vpravo. Navíc setrvačnick bude **volný**, to znamená, že na něj nepůsobí žádné vnější síly. Složky momentu síly na pravé straně rovnic (9.27) jsou proto rovny nule. Eulerovy dynamické rovnice pro takovýto setrvačnick tedy jsou



$$A \dot{\omega}'_1 - (A - C) \omega'_2 \omega'_3 = 0, \quad (9.28)$$

$$A \dot{\omega}'_2 - (C - A) \omega'_1 \omega'_3 = 0, \quad (9.29)$$

$$C \dot{\omega}'_3 = 0. \quad (9.30)$$

Z rovnice (9.30) okamžitě plyne, že  $\omega'_3$  je konstantní; označme tuto konstantu dejme tomu  $\tilde{\omega}$ :

$$\omega'_3 = \tilde{\omega} = \text{konst.} \quad (9.31)$$

Rovnice (9.28) a (9.29) po dosazení (9.31) dají

$$\dot{\omega}'_1 = -\frac{C-A}{A} \tilde{\omega} \omega'_2, \quad (9.32)$$

$$\dot{\omega}'_2 = \frac{C-A}{A} \tilde{\omega} \omega'_1. \quad (9.33)$$

Označíme-li

$$\Omega = \frac{C-A}{A} \tilde{\omega}, \quad (9.34)$$

zderivujeme (9.32) (tedy  $\dot{\omega}'_1 = -\Omega \omega'_2$ ) podle času a do výsledku dosadíme (9.33) (tedy  $\dot{\omega}'_2 = \Omega \omega'_1$ ), dostaneme  $\ddot{\omega}'_1 = -\Omega \dot{\omega}'_2 = -\Omega^2 \omega'_1$ , neboli rovnici

$$\ddot{\omega}'_1 + \Omega^2 \omega'_1 = 0. \quad (9.35)$$

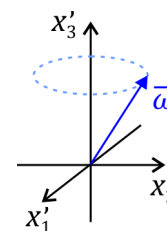
Její obecné řešení umíme napsat:

$$\omega'_1 = a \cos(\Omega t + \varphi_0)$$

a z rovnice (9.32) pak určit  $\omega'_2$  jako<sup>28</sup>  $\omega'_2 = a \sin(\Omega t + \varphi_0)$ . Přitom  $a$  je libovolná konstanta; konstantu  $\varphi_0$  bychom mohli bez újmy na obecnosti zvolit rovnu nule. Výsledné vztahy

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= a \cos(\Omega t + \varphi_0) \\ \omega'_2 &= a \sin(\Omega t + \varphi_0) \\ \omega'_3 &= \tilde{\omega} \end{aligned} \quad (9.36)$$

určují, jak se s časem mění složky úhlové rychlosti v systému  $S'$ , neboli jak se vektor úhlové rychlosti  $\vec{\omega}$  pohybuje vůči rotujícímu tělesu, tedy vůči setrvačnicku. Z (9.36) vidíme, konec vektoru úhlové rychlosti opisuje kružnici, jak to ukazuje obrázek. Lze také říci, že vzhledem k tělesu  $\vec{\omega}$  obíhá s úhlovou rychlostí  $\Omega$  po plášti kužele.



<sup>27</sup> ... tedy rovnici, která má stejný tvar jako „stará dobrá známá“ rovnice pro lineární harmonický oscilátor.

<sup>28</sup> Z (9.32) je  $\omega'_2 = -(1/\Omega) \dot{\omega}'_1$



Můžeme také určit, jak se v soustavě  $S'$  pohybuje vektor  $\vec{L}$ . Jeho složky můžeme určit z úhlové rychlosti a tenzoru setrvačnosti (viz (9.10)) jako  $L'_1 = A\omega'_1$ ,  $L'_2 = A\omega'_2$  a  $L'_3 = A\omega'_3$ . Po dosazení (9.36) dostaneme

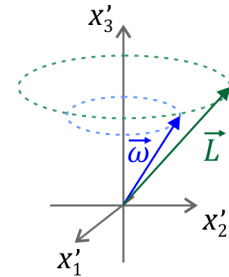
$$\begin{aligned} L'_1 &= Aa \cos(\Omega t + \varphi_0) \\ L'_2 &= Aa \sin(\Omega t + \varphi_0) \\ L'_3 &= C\tilde{\omega} \end{aligned} \tag{9.37}$$

Vektor  $\vec{L}$  se tedy v soustavě  $S'$  spjaté s rotujícím tělesem také pohybuje po plášti kužele, opět obíhá s úhlovou rychlostí  $\Omega$ . Ze srovnání (9.37) a (9.36) je navíc vidět, že osa  $x'_3$ , vektor  $\vec{\omega}$  a vektor  $\vec{L}$  leží v jedné rovině, viz obrázek.

Ze získaného výsledku můžeme dokonce určit, jak se setrvačnický pohybuje vůči nerotujícímu (laboratornímu), tedy **inerciálnímu** systému  $S$ . Protože moment sil je nulový, musí se totiž moment hybnosti zachovávat:

$$\vec{L} = \text{konst.} \tag{9.38}$$

Vektor  $\vec{L}$  tedy vůči inerciálnímu systému zachovává pevný směr – a naopak vektor  $\vec{\omega}$  a osa  $x'_3$  (tedy osa setrvačnicku) kolem tohoto pevného směru obíhají s úhlovou rychlostí  $\Omega$ . Tomuto jevu říkáme **precese setrvačnicku**.<sup>29 30</sup>



<sup>29</sup> Samozřejmě, může nastat i případ, kdy osa setrvačnicku a směry úhlové rychlosti a momentu hybnosti splývají, tomu odpovídá hodnota konstanty  $a = 0$ .

<sup>30</sup> Pohyb osy setrvačnicku a vektorů  $\vec{\omega}$  a  $\vec{L}$  lze také popsat tak, že se po sobě valí dva kužele, osou jednoho je osa setrvačnicku, osou druhého vektor  $\vec{L}$ . Vektor  $\vec{\omega}$  má směr přímky, na níž se oba kužele dotýkají. V učebnicích proto můžete narazit na zajímavě znějící názvy „polhodiový“ a „herpolhodiový“ kužel. My zde dále tuto geometrickou představu rozvíjet nebudeme, zmiňujeme ji spíše pro úplnost, kdybyste na dané názvy narazili.