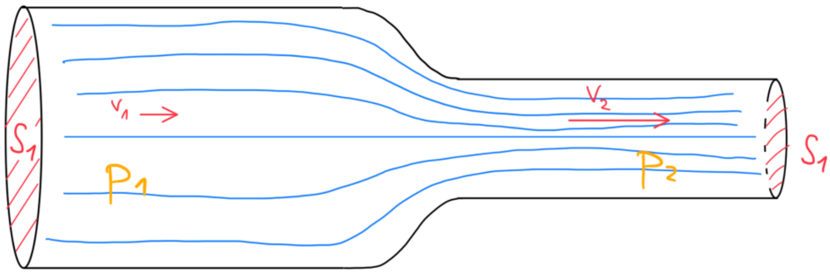
David Holý
holy.david.hd@gmail.com

Hydrodynamický paradox

Na střední škole se žáci setkávají při probírání problematiky proudění tekutin zejména se dvěma vztahy – rovnicí kontinuity[1] a Bernoulliovou rovnicí.[2] Odvozovat ani jednu rovnici nebudeme, odkážeme se však na učební text Leoše Dvořáka [1] či na Přehled středoškolské fyziky [2], kde je teorie podrobně vysvětlena.

Představme si vodorovnou trubici, kterou proudí kapalina a která má dva různé průřezy, jak vidíme na obrázku. Častá miskoncepce je, že tlak v tenčí části trubice bude větší, protože se jednotlivé proudnice „zhušťují“ a navíc je i rychlost kapaliny větší.



Miskoncepce: $p_1 < p_2$

Tyto argumenty mohou v žácích vybudit právě takovou intuici, jenže tomu tak *není*. Právě naopak, tlak kapaliny v širší části trubice je větší! Proč tomu tak je a jak to žákům vysvětlit, je cílem tohoto textu. Zároveň dodávám, že tento text píši právě i kvůli tomu, že jsem si dříve tuhle miskoncepci vytvořil, a až později na MFF pochopil, proč tomu tak není.

Kognitivní konflikt

Strategie kognitivního konfliktu může zafungovat velice efektivně, pokud ukážeme experiment, který je v rozporu s chybnou žákovskou představou. Z hlediska kredibility by byla nejlepší opravdová realizace výše popsané situace, tedy nechat proudit vodu vodorovnou zužující se trubicí se dvěma manometrickými trubičkami, jednou v širší a druhou v užší části trubice – pak by stačilo naměřit, že je tlak v užší části trubice menší. Jelikož ale většina škol takové prostředky nemá, můžeme žákům ukázat alespoň video – např. část Rande s fyzikou věnovanou právě Bernoulliově rovnici [3].

---

[1] $S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$, kde S představuje průřez trubice, v je velikost rychlosti kapaliny, v tomto tvaru platí pro nestlačitelnou kapalinu.

[2] Bernoulliova rovnice se v středoškolských učebnicích standardně uvádí pro vodorovnou trubici, tedy ve tvaru $\frac{1}{2}\varrho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + p_2$, což platí pro stacionární proudění ideální kapaliny.

Analogie

Vysvětlit správnou nerovnost tlaků nám může pomoci i následující úvaha. Víme, že v tenčí části trubice voda zrychluje, musí na ní tedy působit nějaká síla. Tato síla je způsobená rozdílem tlaků. Můžeme použít analogii, že jednotlivé kapky jsou lidé na nádraží spěchající na vlak. Při přesunu z velké haly musí projít úzkou chodbou.

Víme, že zrychlují, aby to stihli všichni (plynule bez nehod a ušlapání - předpokládáme totiž laminární proudění). Můžeme si představit, že každý člověk cítí ve svých zádech, jak se ostatní na něj zezadu tlačí a tím jej potom nutí více spěchat. Tento nátlak davu spěchajícího z haly pak způsobuje právě to zrychlení v zúžení.

Tato analogie jistě není dokonalá. Například bychom mohli uvést problém s hustotou – a dav lidí je částečně stlačitelný - lidé se v užším koridoru opravdu víc na sebe mačkají. Zatímco vodu chápeme jako ideální kapalinu, tedy jako kapalinu nestlačitelnou. Přesto nám však tento příklad může ukázat, že dává smysl, aby tlak byl větší v širší části trubice než v části tenčí.

Je rozhodně rozumné s žáky diskutovat, reagovat na jejich dotazy a postupně odbourávat mylnou představu.

Autoreflexivní učení žáka

Poslední strategie je nejnáročnější, na druhou stranu se žák může dobrat k pravděpodobně nejlepšímu porozumění hydrodynamického paradoxu. Cílem totiž je, aby si z Bernoulliovy rovnice vztah pro tlak odvodil sám, případně s naší asistencí.

Přijde mi rozumné matematické odvození dělat až po experimentu a prodiskutování, jak jsme si to popsali výše. Žák si je už nejspíš vědom správného výsledku, někomu však předchozí úvahy mohou přijít příliš vágní a nekonkrétní. Já bych si ve třídě našel někoho, s kým bych „sehrál divadlo“, že mu to nestačí, že to přeci musí jít odvodit! Tím si otevřeme vrátka, a ostatní taková scénka může namotivovat se více soustředit. Pojďme tedy na to.

Výchozím předpokladem je, že pro průřezy trubice platí $S_1 > S_2$. Řekneme tedy žákům, aby pomocí rovnice kontinuity $S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2$ rozhodli o znaménku nerovnosti mezi rychlostmi.

Poměrně snadno žáci vyjádří $v_1 = \frac{S_2}{S_1} \cdot v_2$.

Zeptejme se žáků, jakou hodnotu má zlomek $\frac{S_2}{S_1}$? Samozřejmě! Jmenovatel je větší než čitatel, platí tedy $\frac{S_2}{S_1} < 1$. Která rychlost je pak větší, když abychom dostali v_1, musíme v_2 vlastně zmenšovat násobením číslem mezi nulou a jedničkou? Ihned vidíme, že opravdu $v_1 < v_2$. Dále necháme žáky, aby vyjádřili rozdíl tlaků $p_1 - p_2$. Stačí rozhodnout, jestli je výsledek záporné nebo kladné číslo.

Z Bernoulliovy rovnice žáci vyjádří tento rozdíl:

$$\frac{1}{2}\varrho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + p_2,$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\varrho v_2^2 - \frac{1}{2}\varrho v_1^2,$$

a po vytknutí na pravé straně

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\varrho(v_2^2 - v_1^2).$$

Připomeneme, že nám jde pouze o znaménko obou závorek. Jedna polovina hustoty je kladné číslo, to nám znaménko nezmění. Zaměřme se tedy na výraz (v_2^2 - v_1^2). Víme, že rychlost $v_2 > v_1$, a tedy $v_2 - v_1 > 0$.

Nyní bychom se mohli zeptat, jestli to bude platit i pro kvadráty rychlostí. Samozřejmě, že bude.[3]

Dostáváme se k závěru. Jelikož je výraz (v_2^2 - v_1^2) kladný, pak podle předchozí rovnice s tlaky je i výraz $p_1 - p_2$ kladný, tedy $p_1 - p_2 > 0$. A po snadné úpravě konečně dostáváme

$$p_1 > p_2.$$

Závěr

Výše popsaná a rozebraná miskoncepce je běžná. Pokusili jsme se navrhnout způsoby, jak žáky přivést ke správnému chápání problému, a to pomocí tří strategií. Věříme, že každému žákovi bude vyhovovat jiný způsob vysvětlení. Největším problémem nakonec může být, jak už se stává, nedostatek času v hodině. Pokud to však nebude problém, tak bych všechny postupy zmínil – možná to totiž bude užitečnější, než nutit žáky počítat příklady zaměřené jen na dosazení do vzorce a výpočet pomocí kalkulačky.

Zdroje a literatura

[1] Dvořák, Leoš. *Prozatímní učební text k předmětu Mechanika*, MFF UK Praha, str. 25-29 URL: https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/Mechanika/Mechanika_11_HydrostatikaaHydrodynamika_ver_0.pdf

[2] Svoboda, Emanuel a kol. (2014). *Přehled středoškolské fyziky*. Prometheus, str. 124-126

[3] https://edu.ceskatelevize.cz/video/147-pokusy-proudeni-kapalin-a-plynu

[3] Mohli bychom procvičit, že $(v_2^2 - v_1^2) = (v_2 - v_1)(v_2 + v_1)$. A protože $v_2 + v_1$ je opět kladné číslo (obě rychlosti jsou kladné), tak je znaménko stejné. Otázka je, jestli to chceme ve výuce provádět - na jednu stranu je to zřetelná demonstrace užitečnosti „vzorečku“ z matematiky, na druhou stranu to může ty méně matematicky zdatné žáky odradit, protože teď se v tom mohou ztrácet.