Univerzita Karlova v Praze
Matematicko–fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Martina Gřondilová

Práce s grafy ve výuce fyziky

Katedra didaktiky fyziky
Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Leoš Dvořák, CSc.
Studijní program: Učitelství pro střední školy, matematika–fyzika

Děkuji doc. RNDr. Leoši Dvořákovi, CSc. a Mgr. Martinu Chválovi za velmi cenné rady a připomínky, které mi poskytli při vypracování diplomové práce. Děkuji vyučujícím Mgr. Miroslavu Burdovi, Mgr. Tomáši Kekulemu, Mgr. Jaromírovi Kekulemu, Mgr. Ivetě Krahulcové, Mgr. Haně Kunzové, Mgr. Jiřímu Kvapilovi, Zdeňku Polákovi a Mgr. Jaroslavu Reichlovi za zadání úloh svým studentům.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 14. 4. 2004 Martina Gřondilová

Obsah

Název práce: Práce s grafy ve výuce fyziky
Autor: Martina Gřondilová
Katedra: Katedra didaktiky fyziky
Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Leoš Dvořák, CSc.
E-mail vedoucího: Leos.Dvorak@mff.cuni.cz
Abstrakt: Diplomová práce zkoumá dovednosti studentů při práci s grafy ve fyzice. V teoretické části práce je popsáno několik dřívějších studií zabývajících se touto problematikou. Byla provedena analýza jedné řady českých a jedné řady amerických fyzikálních učebnic - stanovení relativního zastoupení grafických úloh a shrnutí nejčastějších grafických závislostí v jednotlivých tématech. Dále jsou vytipovány dovednosti potřebné pro porozumění grafům a práci s grafy.

Vlastní výzkum byl proveden pomocí čtyř souborů úloh po 7-9 úlohách. Většina úloh odpovídá tematickým celkům kinematika a molekulová fyzika a každá z položek ověřuje některé dovednosti potřebné k práci s grafy ve fyzice. Vzorek respondentů činil 483 studentů 2., 3. a 4. ročníků čtyřletých SŠ (případně ekvivalentních ročníků víceletých gymnázií) z osmi škol v České republice.

Ze získaných dat byly určeny nejčastější chybné odpovědi a postupy. Výsledky a srovnání s dosavadními studiemi nabízejí některé hypotézy a otázky pro další výzkum.
Klíčová slova: graf, dovednost, výuka fyziky

Title: Work with graphs in physics education
Author: Martina Gřondilová
Department: Department of Physics Education
Supervisor: Doc. RNDr. Leoš Dvořák, CSc.
Supervisor's e-mail address: Leos.Dvorak@mff.cuni.cz
Abstract: The diploma thesis concerns research on skills of students in working with graphs in physics.

Introductory theoretical part comprises a summary of several previous studies focused on this topic. The following analysis of two sets of physical textbooks (one of the Czech and one of the American origin) describes relative percentage of tasks using graphs and the most frequent types of graphs in each topic of grammar–school physics. The skills necessary for understading and working with graphs are identified in the next part. The main part of the thesis describes new research. It used four sets of items (each set containing 7-9 items). The main thematic areas are kinematics and heat and temperature. Each item checks skills necessary for working with graphs in physics. The items were answered by 483 students of 2nd, 3rd and 4th form of eight grammar–schools in the Czech Republic.

As a conclusion, most common mistakes and wrong approaches used by students to solve problems involving graphs were identified. The results in comparison with previous studies indicate some interesting hypotheses and questions for further research.
Keywords: graph, skill, physics education

Úvod

V dnešní době se ve vyspělých zemích staly počítače nedílnou součástí života většiny lidí. Z velké části slouží pro tvorbu a úpravu grafů, diagramů a obrázků. V posledních letech si software pro tato zpracování získává stále větší oblibu mezi běžnými uživateli, a to jednak kvůli zlepšujícímu se výstupu a jednak pro stále snadnější uživatelské ovládání. Oblast, ve které se velmi výrazně uplatňuje vytváření grafů, obrázků apod. pomocí počítače, se týká zpracovávání a prezentace dat.

Díky dnes zcela běžně dostupnému softwaru (např. Microsoft Excel) se prezentace dat formou tabulek a zvláště grafů stává poměrně oblíbenou v médiích (především v tisku a televizi). A tak by jistě k základnímu vzdělání neměla patřit pouze dovednost číst s porozuměním text, ale také schopnost „číst" grafy a rozumět jim.

Dalším důvodem, proč učit žáky a studenty umět pracovat s grafy včetně grafů funkcí, je skutečnost, že většina absolventů základních a středních škol bude tuto dovednost potřebovat buď v dalším studiu nebo při vykonávání povolání, a to nejen technického rázu.

Je zřejmé, že výše uvedené důvody by mohly být poměrně velkou motivací vyučovat a učit se grafům nejen pro učitele, ale i pro studenty, a to i pro ty, kteří se v budoucnosti chtějí věnovat především humanitním oborům.

A proč právě grafy ve fyzice? Práce s grafy funkcí patří na střední škole hlavně do učiva matematiky. Bylo by tedy možné namítnout, že je zbytečné zabývat se grafy i v dalších předmětech. Domnívám se však, že příklady z fyziky, ale i biologie, zeměpisu atp. mohou velmi dobře sloužit jako ukázky aplikací matematických poznatků. A zcela jistě patří grafy do výuky fyziky, když chce učitel poskytnout žákům základní představy o práci přírodních věd. Nedílnou součástí většiny vědeckých bádání je totiž experiment. A právě grafy hrají při jeho vyhodnocování důležitou roli. Neboť „graf zobrazující fyzikální jev dovoluje zběžným pohledem určit směr vývoje, který není rozpoznatelný z tabulky těch samých hodnot" [5], a také „postřehnout jemné tvarové rozdíly". [6]

Vzhledem k tomu, že některé zahraniční studie, publikované v posledních dvaceti letech, ukazují na problémy studentů a žáků s porozuměním grafům, je, dle mého názoru, zajímavé zjistit, jak ovládájí práci s grafy studenti u nás a čeho se případné potíže týkají. Je vhodné začít spíše s pilotním výzkumem, který by měl poskytnout orientaci v dané problematice a naznačit typický výskyt chyb. Dále by měl umožnit základní a spíše kvalitativní srovnání s dosavadními studiemi a ukázat zajímavé problémy a směry pro další zkoumání.

V Kapitole 1 jsou popsány dosavadní studie, jež se zabývají tématem práce s grafy ve fyzice, včetně jejich charakteristiky a souhrnu výsledků těchto studií. Kapitola 2 uvádí obsahovou analýzu dvou řad učebnic — české a americké na pomezí SŠ a VŠ kurzů. Především je zde přehled nejčetnějších závislostí užívaných v těchto učebnicích a jsou stanoveny typy úloh z hlediska dovedností potřebných k jejich řešení. V Kapitole 3 jsou stanoveny požadavky pro práci s grafy na střední škole. Následující kapitola informuje o vlastním výzkumu. V Kapitole 5 je provedena analýza testovaných úloh a Kapitola 6 pak uvádí výsledky vlastního výzkumu.

Kapitola 1

Dosavadní studie týkající se práce s grafy ve fyzice

Tato kapitola stručně charakterizuje a shrnuje dosavadní studie zabývající se prací s grafy ve fyzice.

1.1 Zdroje

K vyhledávání dřívějších studií, zabývajících se práce s grafy ve fyzice, jsem nejprve použila internet. Konkrétně vyhledavače na www.google.com. Zadanými výrazy byly „+graph* +"physics education"", „graf*+vyuka+fyz*". Stejně jako v dalším hledání jsem vybírala práce v češtině, slovenštině, angličtině, případně i v polštině a ruštině psané latinkou.

Dále jsem přes klíčová slova či slova z názvu (zadán „graph") prohledala internetové databáze časopisů Physics Education, The Physics Teacher a American Journal of Physics a encyklopedie Britannica. Těmito způsoby jsem nalezla odkazy na několik článků, po prohledání odebíraných periodik v níže uvedených knihovnách se pro mě staly dostupnými pouze články [5], [4].

Další literaturu jsem hledala v on-line databázích (způsobem podobným předchozím) následujících knihoven: knihovna MFF UK, Národní knihovna ČR (v Klementinu), Státní technická knihovna, Knihovna FZÚ AV ČR (Na Slovance a v Cukrovarnické ulici v Praze), Státní vědecká knihovna v Hradci Králové, Knihovna Univerzity Hradec Králové, Státní pedagogická knihovna Komenského v Praze. V posledně jmenované jsem nalezla studii [3].

Také jsem oslovila naše přední didaktiky fyziky doc. RNDr. Oldřicha Lepila, CSc., prof. RNDr. Emanuela Svobodu, CSc. a prof. RNDr. Ivo Volfa, CSc. Od nich jsem se dozvěděla o doc. RNDr. Václavu Koubkovi, CSc. z UK v Bratislavě a jeho spolupracovnici doc. RNDr. Márii Rakovské, CSc. z UKF v Nitře. Výzkumem, jak umí žáci pracovat s grafy ve fyzice, se na Slovensku zabývali několik let. Z publikací doc. V. Koubka jsem sehnala, díky archivu prof. E. Svobody, články uveřejněné v Matematice a fyzice ve škole ([2], [1]). Ostatní materiály nebyly bohužel k dispozici v elektronické podobě. Doc. V. Koubek mi však poskytl prezentaci doktorské práce RNDr. Zuzany Ješkové, PhD., která se tímto tématem zabývala v rámci doktorského studia. Bohužel dr. Z. Ješkovou se mi nepodařilo kontaktovat, neboť v roce 2003 byla na mateřské dovolené. Proto jsem se musela spokojit pouze s články, které publikovala v MFI ([7]) a Obzorech matematiky, fyziky a informatiky ([6]); tento časopis odebírá např. knihovna MÚ ČR v Žitné ulici v Praze. Na závěr vyhledávání jsem pročetla citace již zmíněných studií. Žádné z nich neodkazují na důležité články, jež jsem dosud nenašla.

1.2 Charakteristika studií

Charakteristika jednotlivých získaných studií je shrnuta v Tabulce 1:

studie	rok	země původu	obor fyziky	úroveň[1]	metoda výzkumu[2]	počet testovaných
[1]	1975	SR	kinematika	ZŠ, SŠ	P, C	320
[2]	1978	SR	kinematika	ZŠ	C	neuvedeno
[3]	1980	ČR	kinematika, kmitání, vlnění	SŠ	P	442
[4]	1987	USA	kinematika	SŠ ∧ VŠ	P, C	několik set
[5]	1994	USA	kinematika	SŠ ∧ VŠ	T	524
[6]	2000	SR	kinematika	SŠ ∧ VŠ	T, C	518
[7]	2001	SR	elektřina	SŠ	T, C	179

Poznámka:
1. Úroveň
udává, pro který stupeň vzdělávání byl test sestaven a zadán,
ZŠ - 2. stupeň základní školy, SŠ - střední škola, VŠ - vysoká škola;
zápis SŠ ∧ VŠ znamená, že test byl sestaven pro úroveň střední školy, ale zadáván byl i v prvních ročnících školy vysoké
2. Použité metody výzkumu

T: Jedná se o standardizovaný didaktický test. V těchto studiích obsahuje pouze uzavřené úlohy s výběrem odpovědi, z nichž právě jedna je správná. Analýza výsledků je pak provedena pomocí statistiky.

P: Nestandardizovaný test, který obsahuje téměř výhradně otevřené úlohy a to jak se stručnou tak i se širokou odpovědí. Analýza výsledků pak spočívá ve zjištění počtu procent správných odpovědí na danou otázku a uvedení příkladů nejčastějších chybných odpovědí.

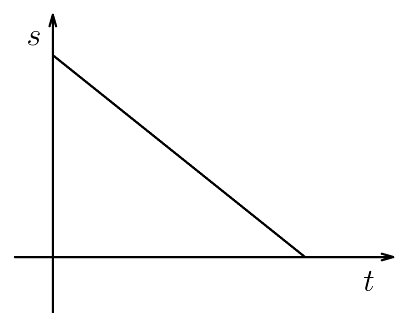
C: V článku jsou více či méně podrobně rozepsány cíle a požadavky pro práci s grafy funkcí ve fyzice na dané úrovni.

1.3 Souhrn výsledků

Dosavadní studie svůj výzkum zaměřily převážně na zjištění nejčastějších chyb při práci s grafy. Proto je i tento souhrn výsledků převážně souhrnem chyb které, byly v předcházejících studiích zjištěny. Vzhledem k tomu, že většina studií (viz Tabulka 1) je zaměřena pouze na oblast kinematiky, vztahují se níže uvedené chyby především k této oblasti.

- **Studenti často vnímají graf jako obrázek či náčrt dané situace, ne jako abstraktní matematickou reprezentaci.**
  Studie [5] uvádí, že učitelé fyziky často poukazují na to, že studenti mají především problémy znázornit pomocí grafu fyzikální realitu. Konkrétně v kinematice: mají-li studenti pracovat se závislostmi dráhy, velikosti rychlosti a velikosti zrychlení na čase, velmi často chápou tyto grafy jako náčrty dané situace. Pro ilustraci uvádím konktrétní příklady: Studenti měli za úkol vynést do grafu závislost velikosti rychlosti cyklisty jedoucího nejprve z kopce, pak do kopce a nakonec po rovině na čase. Načrtnuté závislosti se často podobaly popsanému terénu. V grafu závislosti dráhy na čase měli studenti označit úsek, který popisoval přímočarý pohyb s konstantní rychlostí. V nejčetnější nesprávné odpovědi „studenti přiřadili konstantní rychlost části grafu rovnoběžnému s osou".[3]

  Ze stejného zdroje ještě jeden příklad: Žáci měli interpretovat graf závislosti dráhy na čase (viz obr.1)[1]. Pouze 50 % uvedlo správnou odpověď. Odpovědi, že jde o „pohyb zrychlený", nebo dokonce o „pád", „pohyb klesající" nebo „šikmý vrh", svědčí o hrubé záměně grafu dráhy s trajektorií tělesa.

  Obr. 1

  Tento typ chyby se často projevuje také tehdy, řeší-li studenti převádění jedné grafické závislosti na jinou. Při tomto úkolu totiž studenti nejsou schopni ignorovat původní tvar grafu. Podle [5] 25 % studentů věří, že přechod mezi kinematickými proměnnými nemění vzhled grafu. A [4] dodává, že „studenti často nevědí, že musí použít směrnici z grafu závislosti dráhy na čase jako výšku v grafu závislosti souřadnice rychlosti na čase". Naproti tomu [6] tvrdí, že „k danému grafu najít odpovídající graf jiné kinematické veličiny pro tentýž děj, dělalo žákům relativně malé problémy" (úspěšnost 65-70 %), přesto graf podobný zadanému vybralo přibližně 20 % žáků, což je velmi podobný výsledek jako v případě [5]. Takovéto byly výsledky, jestliže se jednalo o rovnoměrný či rovnoměrně *zrychlený* přímočarý pohyb. Graf závislosti rychlosti na čase pro rovnoměrně *zpomalený* pohyb správně řešila jen necelá třetina studentů, „většina z nich prezentovala graf jako věrný obraz skutečnosti, jako fotografii

[1] Takto byl příklad zadán ve studii [3], domnívám se však, že autorka zřejmě uvažovala souřadnici.

dané situace — nejčastěji volili pohyb s rovnoměrně klesajícím a ne s konstantním zrychlením".

V příkladě v [3] se však tato chyba neprojevila. Je dána fotografie zobrazující funkci sinus, jež byla získána vyfotografováním postupné vlny na gumové hadici. U této fotografie měli studenti doplnit veličiny, které jsou vyneseny na jednotlivých osách. Správně odpověděla pouze třetina žáků, nejčastější chybou byla odpověď, že na vodorovné ose je vynesen čas. Domnívám se, že v tomto případě dali žáci před zobrazením skutečnosti zřejmě přednost grafu poměrně známějšímu.

- **Studenti často nerozlišují mezi výškou[2] a směrnicí grafu.**
  [5] i [4] uvádí, že studenti často nevědí, zda se požadovaná informace získá ze směrnice či z výšky grafu.

  Graf na obrázku 2 znázorňuje závislost dráhy dvou pohybujících se objektů A, B na čase. Oba objekty se pohybují podél stejné měřicí tyče. Studenti měli určit, který z objektů se v čase $t = 2$ s pohybuje rychleji a svůj výběr zdůvodnit. Většina nesprávných odpovědí uváděla B s odůvodněním, že v tomto čase leží úsečka B nad úsečkou A.

  Obr. 2 (z práce [4])

- **Studenti mají problémy s určením směrnice.**
  V studii [5] se potvrdilo, že „studentům dělá potíže určení směrnice, ale pouze pro 'neobvyklý' tvar čáry grafu". Pokud procházela závislost počátkem soustavy souřadné, odpovědělo 73 % dotazovaných správně. Pokud ne, byla úspěšnost nižší — správně odpověděla přibližně čtvrtina studentů. Nejčastější nesprávnou odpovědí bylo uvedení podílu y-ové a x-ové souřadnice daného bodu.

  Studie [6] uvádí podobné výsledky s tím rozdílem, že nejčastější chybou se stalo odečítání y-ové souřadnice bodu, v kterém bylo třeba určit rychlost. I při interpretaci fyzikálních závislostí z elektřiny, pokud šlo o lineární průběh procházející počátkem, odpovídalo správně téměř 77 % studentů. Obecně lze říci, že „pro studenty (jak lze očekávat) je těžší interpretovat grafy obecných závislostí než závislostí lineárních".[4]

- **Studenti neznají význam plochy pod grafem.**
  Při určení dráhy z grafu závislosti rychlosti na čase nemají studenti potíže, jestliže je přímočarý pohyb rovnoměrný (podle [5] a [6] správně odpověděly

[2] výška grafu v daném bodě znamená $y-$ovou hodnotu v tomto bodě; jedná se o doslovný překlad z angličtiny z předchozích studií, který jsem použila pro jeho stručnost

přibližně tři čtvrtiny studentů), pokud se však jednalo o přímočarý pohyb zrychlený, úspěšnost klesla až na 40 %. „Jinak řečeno, studenti byli schopni užít vzorec $s = v.t$ pro nalezení dráhy, ale neuměli stanovit tutéž informaci pohledem do grafu a vypočtením plochy pod grafem".

Ve studii [4] byl na výzkum chyb při interpretaci plochy pod grafem zadán následující příklad: Na obrázku 3 je znázorněn graf závislosti rychlosti na čase předmětu, který byl v čase $t = 0$ v poloze $x = 0$. Kdy se bude nacházet v poloze $x = 110$ cm?

Obr. 3 (z práce [4])

Největším problémem při řešení tohoto příkladu byla neschopnost studentů představit si pohyb, který je znázorněn takovýmto grafem. Studenti nevědí, že střídání kladné a záporné plochy pod grafem reprezentuje posunutí ve směru dané osy a proti směru dané osy. Pokud studenti nepoznají, že se jedná o oscilující pohyb, hledají pouze jeden časový okamžik, který vyhovuje zadání. Ukázalo se také, že studenti sice vědí, že mají počítat „plochu pod grafem", ale už nevědí, co to znamená. Někteří totiž ignorovali osu $v = 0$ a počítali plochu mezi grafem a spodní linií mřížky.

- **Potíže při sestrojování grafu.**
  Jejich výzkumem se z uvedených studií zabývaly pouze práce [4] a [1]. V [4] měli studenti sestrojit graf závislosti souřadnice na čase, který by popisoval následující situace:
  a) Ocelová kulička se pohybuje v přímém hliníkovém vodicím pásu po vodorovné desce.
  b) Kulička se pohybuje (ve vodicím pásu) po desce, jež je nejprve vodorovná, pak se svažuje a poté je opět vodorovná.
  V případě a) jde tedy o pohyb rovnoměrný, v případě b) o pohyb nejprve rovnoměrný, pak rovnoměrně zrychlený a nakonec opět rovnoměrný. Studenti měli k dispozici stopky a měřicí pravítka, ale nebylo jim přesně řečeno, co a jak mají měřit.

  Někteří studenti měli dokonce problémy se zakreslením rovnoměrného pohybu — uvedli totiž konstantní závislost $s(t)$. Další chybou, týkající se už samotného sestrojování grafů, bylo zakreslení nespojité závislosti. Někteří studenti sice uvedli spojitou závislost, jež však získali pouhým pospojováním bodů vynesených do grafu.

  Studie [1] uvádí, že sestrojit graf z tabulky daných hodnot činilo problémy 20 % žáků 8. ročníku základní školy a pouze 3,5 % studentů v 1. ročníku gymnázia. Zde však mělo 10 % studentů potíže s aproximací sestrojených bodů spojitou křivkou.

Kapitola 2

Obsahová analýza učebnic fyziky z hlediska rozvíjení práce s grafy

V této kapitole jsou uvedeny často užívané grafické závislosti v učebnicích fyziky na pomezí SŠ a VŠ kurzů a četnost jejich zastoupení v jednotlivých oborech fyziky. Dále jsou zde stanoveny typy úloh z hlediska dovedností potřebných k jejich vyřešení.

K analýze jsem vybrala řadu učebnic Fyzika pro gymnázia [8], vydanou nakladatelstvím Prometheus v roce 2003, dále pak český překlad učebnice Fyzika od autorů D. Halliday, R. Resnick a J. Walker (nakladatelství VUTIUM a Prometheus, 2000) [9]. České učebnice [8] jsou určeny pro úroveň střední školy, americké učebnice [9] pak pro úroveň na pomezí SŠ a VŠ.

První ze zmíněných učebních materiálů jsem vybrala proto, že se jedná o nejobsažnější české všeobecné učebnice fyziky pro střední školy. Jiné učebnice fyziky pro gymnázia zatím v ČR nejsou (podle [15]). Co se týče učebnic pro střední odborné školy a učiliště, existují všeobecné pro předmět Fyzika a odborné, zaměřené na konkrétní obor podle specializace jednotlivých škol. Všeobecné učebnice jsou velmi podobné gymnaziálním, ale co do obsahu učiva stručnější. Druhou řadu učebních materiálů jsem vybrala kvůli porovnání zahraničních učebnic s tuzemskými. Ze zahraničních učebnic jsem zvolila tuto řadu především kvůli dostupnosti na našem trhu. Učitelé, pokud by chtěli, by takto mohli snáze korigovat zjištěné rozdíly.

2.1 Četnost zastoupení používaných grafických závislostí

Tato část kapitoly prostřednictvím uvedených publikací mapuje procentuální zastoupení příkladů zaměřených na grafy v oborech fyziky a absolutní počet příkladů ve výkladové části učebnice také v jednotlivých oborech fyziky. Dále pak uvádí, s jakými druhy závislostí ve fyzice se může student SŠ setkat a četnost jejich zastoupení v oborech fyziky.

Fyzika pro gymnázia [8]
V této řadě učebnic je celkem 2082 úloh, některé z nich jsou řešené. Příkladů, které cvičí dovednost práce s grafy, je 101, což tvoří 4,9 % všech úloh.

Tabulka 2 uvádí, jaká část učiva zaměřeného na grafy připadá na jednotlivé obory fyziky. Učivo je rozděleno na část procvičující a výkladovou. Zastoupení výkladové části je zjišťováno podle absolutního počtu grafů, které se nacházejí v učebnici ve výkladu v příslušném oboru. Zastoupení procvičující části je zjišťováno podle počtu příkladů zaměřených na práci s grafy. Vzhledem k tomu, že je možné určit celkový počet příkladů, je zde uveden nejen absolutní počet, ale i počet relativní.

Tabulka 2:

	část učiva			
	procvičující			výkladová
		zaměřená na grafy		
obor	celkem úloh	absolutní	v procentech	počet grafů
mechanika	533	26	4,9 %	16
mechanické kmitání a vlnění	152	22	14,5 %	14
molekulová fyzika a termika	369	39	10,6 %	13
elektřina a magnetismus	425	12	2,8 %	29
optika	200	0	0,0 %	4
moderní fyzika	253	2	0,8 %	12

Tabulka 3 ukazuje nejčastější závislosti, s nimiž se může středoškolský student setkat ve fyzice. Námět na rozdělení závislostí pochází z internetového článku [14], který popisuje typické fyzikální závislosti včetně ukázek příkladů.

Dále Tabulka 3 uvádí, kolik procent učiva zaměřeného na grafy, je věnováno jednotlivým závislostem. Jako v předchozí tabulce i zde je učivo rozděleno na část procvičující a výkladovou. V procvičující části byl zjišťován počet příkladů zaměřených na grafy, ve výkladové části počet grafů ve výkladu dané učebnice. Procenta u jednotlivých závislostí pak udávají, kolik procent příkladů či grafů obsahuje danou závislost.

V posledním sloupci tabulky jsou sestupně seřazeny obory fyziky, v nichž se daná závislost používá nejčastěji, včetně absolutního počtu grafů ve výkladové části (V) a příkladů na grafy v části procvičující (P).

Tento přehled by měl sloužit jednak pro učitele matematiky, pokud hledají vhodné aplikační úlohy, a pak také pro učitele fyziky, aby vždy před probíráním daného učiva zopakovali příslušné partie z matematiky.

Tabulka 3:

závislost	část učiva: procvičující	část učiva: výkladová	obor	počet grafů: P	počet grafů: V
lineární	45,5 %	21,6 %	mechanika	18	8
			molekulová fyzika	10	1
			elektřina a magnetismus	7	6
nepřímá	10,9 %	2,3 %	molekulová fyzika	10	1
kvadratická	6,9 %	6,8 %	mechanika	7	5
sinová	19,8 %	20,4 %	mech. kmitání a vlnění	19	8
			elektřina a magnetismus	1	10
jiná	16,8 %	48,8 %	molekulová fyzika	8	9
			elektřina a magnetismus	4	11
celkem	100 %	100 %			

Fyzika [9]
V této učebnici je celkem 6499 úloh. Příkladů, které cvičí dovednost práce s grafy, je 233, což tvoří 3,6 % všech úloh.

Tabulka 4 uvádí stejné údaje pro učebnice [9] jako Tabulka 2 pro učebnice [8].

Tabulka 4:

obor	část učiva: procvičující: celkem úloh	procvičující: zaměřená na grafy: absolutní	procvičující: zaměřená na grafy: v procentech	výkladová: počet grafů
mechanika	2234	125	5,6 %	29
mechanické kmitání a vlnění	505	25	4,9 %	16
molekulová fyzika a termika	436	38	8,7 %	17
elektřina a magnetismus	1896	32	1,7 %	32
optika	509	5	1,0 %	7
moderní fyzika	919	2	0,2 %	26

Tabulka 5 uvádí stejné údaje pro učebnice [9] jako Tabulka 3 pro učebnice [8].

Tabulka 5:

závislost	část učiva: procvičující	část učiva: výkladová	obor	počet grafů: P	počet grafů: V
lineární	47,1	15,5	mechanika	68	7
			elektřina a magnetismus	13	5
			molekulová fyzika	12	4
nepřímá	2,9	8,7	molekulová fyzika	3	6
kvadratická	10,1	11,7	mechanika	20	7
sinová	8,0	10,7	mech. kmitání a vlnění	19	13
			elektřina a magnetismus	8	9
jiná	31,9	42,8	mechanika	37	14
			molekulová fyzika	23	7
			elektřina a magnetismus	9	13
celkem	100 %	100 %			

2.2 Typy úloh rozvíjejících dovednost pracovat s grafy funkcí

Při zjišťování typických příkladů, jimiž autoři rozvíjejí dovednost pracovat s grafy, jsem vycházela z [8], [9].
Úlohy lze podle zadání rozdělit do tří kategorií:

I. Odečítání údajů ze zadaného grafu

II. Sestrojení grafu ze zadaných údajů

III. Úlohy kombinující odečítání údajů a sestrojování grafů

Dále jsem ke každé z těchto kategorií vytipovala konkrétní dovednosti potřebné k vyřešení úloh. Jsou uvedeny níže včetně počtu procent příkladů (z analyzovaných učebnic), k jejichž úspěšnému vyřešení je třeba dané dovednosti. Vzhledem k tomu, že k vyřešení některých příkladů je třeba použít více dovedností, není součet relativního počtu příkladů 100 % . Z těchto vytipovaných dovedností jsem vycházela v následující kapitole při vymezení rozsahu dovedností při práci s grafy, které potřebuje středoškolský student.

K úspěšnému vyřešení úlohy musí student umět:

		počet příkladů v: [8]	[9]
I.1.	odečíst hodnoty z grafu	36,7 %	29,6 %
I.2.	vypočítat směrnici v grafu lineární funkce	14,8 %	4,3 %
I.3.	interpretovat a vypočítat obsah „plochy pod grafem"	6,9 %	15,9 %
I.4.	kvalitativně popsat, jaký fyzikální jev daný graf znázorňuje	17,8 %	30,4 %

I.5.	určit průměrnou rychlost změny nelineární funkce	0,0 %	1,3 %
I.6.	určit okamžitou rychlost změny nelineární funkce	0,0 %	3,0 %
I.7.	rozhodnout, zda funkce na daném intervalu roste nebo klesá nebo je konst.	0,0 %	10,7 %
I.8.	rozhodnout, jak rychle funkce roste nebo klesá v jednotlivých intervalech, nebo v porovnání s jinými křivkami závislostí v tomtéž grafu	0,0 %	3,4 %
I.9.	interpretovat přechod z kladných do záporných hodnot souřadnice vektorové veličiny	0,0 %	2,6 %
II.1	sestavit tabulku hodnot	16,8 %	10,7 %
II.2	zvolit vhodná měřítka na osách	21,8 %	10,3 %
II.3	správně proložit křivkou body vynesené do grafu	14,8 %	12,0 %
II.4	kvalitativně tvarem křivky grafu správně vystihnout danou závislost	7,9 %	12,0 %
III.1	sestrojit graf a odečíst z něho údaje podle výše uvedených požadavků	7,9 %	4,7%
III.2	převést graf znázorňující jistý fyzikální jev na graf zobrazující tentýž jev pomocí závislosti jiných veličin	1,0 %	4,7%

Kapitola 3

Cíle výuky grafů funkcí v SŠ fyzice

V této kapitole jsou uvedeny požadované dovednosti středoškolských studentů při práci s grafy funkcí v předmětu fyzika. Jedná se o dovednosti, které by, dle mého názoru, bylo vhodné, aby student měl, případně získal. A to nejen kvůli řešení problémů ve fyzice, ale také pro získání a porozumění informacím. Dále se domnívám, že tyto dovednosti budou po studentech vyžadovány v řadě profesí, např. aby uměli formou grafů prezentovat své výsledky, apod. V neposlední řadě budou studenti tyto dovednosti potřebovat v případném dalším studiu v technických a přírodovědných oborech, ale i v medicíně, ekonomii či oborech humanitních.

Při stanovení požadavků jsem vycházela z dřívějších studií (viz. Tabulka 1) a Katalogu požadavků ke společné části maturitní zkoušky [10]. Poté jsem provedla myšlenkový rozbor řešení základních typů úloh zmíněných v Kapitole 2 a seznam již získaných dovedností z předchozích studií rozšířila. V seznamu jsou přidané dovednosti označeny *. Toto vymezení rozsahu dovedností není definitivní, např. další rozbor výsledků úloh může ukázat potřebu dovednosti blíže specifikovat.

Studenti se při řešení problémů mohou setkat se třemi základními typy úloh, k jejichž úspěšnému vyřešení je třeba umět pracovat s grafy (viz podkapitola 2.2). Proto jsem požadované schopnosti studentů rozdělila do tří kategorií:

I. Student dovede odečítat z grafu funkce hodnoty veličin (viz [10]).

II. Student dovede sestrojit graf závislosti dvou fyzikálních veličin (viz [10]).

III. Student dovede kombinovat sestrojování grafů a odečítání údajů.

Dále následuje vymezení rozsahu dovedností v jednotlivých kategoriích. Dovednosti jsou, pokud to lze, řazeny podle sledu myšlenkových kroků. Označeny jsou zpravidla třemi znaky, z nichž první udává příslušnost ke kategorii (viz rozdělení výše).

Vymezení rozsahu potřebných dovedností:

Student z grafu závislosti veličiny y na veličině x dovede:

I.a.1 určit, závislost jakých veličin je vynesena do grafu *

I.b.1 interpretovat velikosti veličin na osách*
I.b.2 interpretovat nelineární škálování *
I.b.3 interpretovat volbu počátku soustavy souřadnic *

I.c.1 k dané hodnotě x najít jednoznačně odpovídající hodnotu y a naopak
I.c.2 interpretovat lomy a nespojitosti závislosti *
I.c.3 určit, v kterých intervalech je hodnota y-ové souřadnice kladná či záporná (příp. rovna 0) *
I.c.4 správně interpretovat přechod y-ové souřadnice z kladných do záporných hodnot a naopak, pokud je y souřadnicí vektorové veličiny *
I.c.5 určit lokální a globální extrémy *

I.d.1 určit jaká změna Δy odpovídá změně Δx
I.d.2 určit, v kterých intervalech závislost y na x roste, klesá, je konstantní *
I.d.3 určit, v kterých intervalech roste, klesá nebo je konstantní velikost vektorové veličiny, pokud je y souřadnicí této vektorové veličiny*
I.d.4 rychlosti změny veličiny y přiřadit fyzikální význam
I.d.5 kvalitativně porovnat, jak rychle roste nebo klesá závislost y na x v jednotlivých částech křivky grafu*
I.d.6 určit průměrnou rychlost změny veličiny y v závislosti na x
I.d.7 určit okamžitou rychlost změny veličiny y v závislosti na x
I.d.8 na daném intervalu porovnat rychlosti změn různých proměnných y_i závislých na x vynesených do grafu se stejným měřítkem *

I.e.1 interpretovat velikost plochy pod grafem $y = f(x)$ jako velikost veličiny o rozměrech $[x] \cdot [y]$ a v případě, kdy je takto vymezená plocha jednoduchým geometrickým útvarem, dovede velikost obsahu této plochy určit

I.f.1 určit, v kterých částech grafu je křivka konvexní, konkávní; najít inflexní bod [1]*
I.f.2 přiřadit fyzikální význam konvexitě a konkávnosti křivky v grafu *

I.g.1 kvalitativně popsat, jaký fyzikální děj daný graf znázorňuje

II.a.1 stanovit ze zadání úlohy, která veličina je závisle proměnná a která nezávisle proměnná
II.a.2 z analyticky vyjádřené funkční závislosti sestavit tabulku hodnot *

[1] nejedná se o přesné analytické stanovení těchto bodů a analýzu průběhu funkce dané vzorcem, ale o nalezení daných bodů z tvaru funkce

II.b.1	z kvalitativního zadání správným tvarem křivky grafu vystihnout závislost *
II.c.1	zvolit vhodná měřítka na jednotlivých osách
II.c.2	vhodně zvolit počátek soustavy souřadné *
II.d.1	vynést body do grafu (z tabulky hodnot, ze vzorce apod.)
II.d.2	body získanými z experimentálních dat a vynesenými do grafu proložit hladkou křivku odpovídající teoretické závislosti
III.a.1	sestrojit graf a odečíst z něho údaje podle výše uvedených požadavků *
III.b.1	převést graf znázorňující jistý fyzikální jev na graf zobrazující tentýž jev pomocí závislosti jiných veličin

Kapitola 4

Vlastní výzkum

V této kapitole jsou uvedeny základní informace o vlastním výzkumu. Vymezím, jaké oblasti fyziky se týkal, jaká byla použita metoda výzkumu a jaký byl rozsah testování.

4.1 Oblast výzkumu

Ve svém výzkumu jsem se, podobně jako většina dosavadních studií, zaměřila na nejčastější chyby při práci s grafy ve fyzice. Cílem tohoto výzkumu tedy nebylo zhodnotit, jak současní studenti umí pracovat s grafy, ale především zjistit, co jim dělá nejvíce potíže.

Výzkum probíhal především ve dvou oborech fyziky: mechanika (převážně kinematika) a molekulová fyzika a termika. Jedním z důvodů tohoto výběru bylo zaměření dosavadních studií. Druhým důvodem byla snaha zapojit do testování studenty z co největšího počtu ročníků. Vzhledem k tomu, že jsem požadovala, aby studenti řešili úlohy až po probrání daného učiva, byli, díky tomuto výběru oborů, vhodnými adepty studenti 2., 3. a 4. ročníků čtyřletých (případně ekvivalentních ročníků víceletých) gymnázií a středních škol.

4.2 Metoda výzkumu

V dosavadních studiích zaměřených na práci s grafy ve fyzice byly použity dvě metody výzkumu (viz. Tabulka 1 v Kapitole 1). První metodou je standardizovaný didaktický test pouze s uzavřenými úlohami (ozn. T), jehož výsledky byly statisticky zpracovány. Druhou metodu představuje nestandardizovaný didaktický test převážně s úlohami otevřenými (ozn. P), analýza výsledků je prováděna na základě relativních četností jednotlivých odpovědí.

Výzkum provedený v rámci této diplomové práce využívá kombinace obou metod. Vzhledem k otevřenosti řady úloh lze však konstatovat, že v něm hraje významnou úlohu metoda označená výše jako P. Domnívám se, že je velmi vhodné použít tuto metodu jako sondu na první průzkum neznámé oblasti. Otevřené úlohy se stručnou či širokou odpovědí poskytují žákovi dostatečný prostor pro jeho individuální řešení. Tímto způsobem sice dochází k rozmělnění chyb, na druhou stranu existuje malé riziko opomenutí nějaké studentské chyby, což se může snadno stát při špatné volbě distraktorů u uzavřených úloh.

Použití uzavřené úlohy má oproti otevřené úloze několik výhod. Zvláště rychlost a objektivitu při opravování. Uzavřená úloha také mnohé žáky odrazuje méně než úloha otevřená. Proto jsem do souboru úloh zařadila i úlohy uzavřené.

4.3 Rozsah výzkumu

Vytvořila jsem 4 soubory označené A1, A2, B1 a B2. Každý soubor obsahuje průměrně 8 úloh a to jak otevřených tak uzavřených. Některé úlohy jsou původní, některé převzaté či upravené. Konkrétní informace podává následující tabulka.

Tabulka 6:

úlohy	
původní	A1-1, A1-2, A1-3, A1-4, A1-5, A1-6, A1-8, A2-1, A2-3, A2-5, A2-6,
	A2-7, B1-1, B1-4, B1-5, B1-6, B2-2, B2-4, B2-6
převzaté	B2-1 z [9, s.31]
upravené	A1-7 námět převzat z [11, s.711], A1-9 graf převzat z [20]
	A2-2 námět převzat z [12, s.233], A2-4 graf převzat a upraven z [18]
	A2-8 graf převzat z [21], B1-2 graf převzat a upraven z [11]
	B1-3 graf převzat z [17], B1-7 upraveno z [11, s.604]
	B1-8 graf převzat z [19], B2-3 upraveno z [13, s.39]
	B2-5 námět převzat z [11, s.586], B2-7 graf převzat z [22]

Vzhledem k tomu, že cílem nebylo zkoumat rychlost při práci s grafy, stanovila jsem na vyřešení daného souboru úloh dostatek času, konkrétně jednu vyučovací hodinu.

Testování se účastnilo celkem 483 studentů z 8 škol. Výběr škol byl proveden na základě spolupráce se středoškolskými učiteli, kteří se účastní seminářů projektu Heuréka [16]. Tito učitelé ve svých hodinách či v hodinách svých kolegů zadali již zmíněné soubory úloh. Školy, které se testování účastnily, uvádí následující přehled včetně počtu tříd a ročníků.

	počet tříd	ročník
SPŠS Sokolská v Brně	3	1. a 2.
SPŠST Panská v Praze	4	4. a 3.
Jiráskovo Gymnázium v Náchodě	2	4.
Gymnázium Botičská v Praze	1	2.
Gymnázium J. Nerudy v Praze	2	4.
Gymnázium v Olomouci-Hejčíně	3	3.
Gymnázium Trhové Sviny	1	2.
Gymnázium J. Wolkera v Prostějově	3	4.

Rozdělení variant úloh mezi školy bylo provedeno tak, aby vzorky studentů připadající na jednotlivé varianty, byly pokud možno podobné. Vzhledem k tomu, že v rámci jednotlivých škol (dle sdělení vyučujících) nebyly mezi třídami velké rozdíly (až na jednu třídu 1. ročníku SPŠS v Brně), byla snaha na dané škole otestovat co nejvíce variant. Dále bylo při zadávání úloh sledováno pokud možno rovnoměrné rozdělení mezi ročníky a samozřejmě rovnoměrné rozdělení podle počtu studentů. Na každou úlohu tak připadá počet žáků v rozmezí 111 - 133.

První verze úloh byly pilotovány na letním matematicko - fyzikálním soustředění pro středoškoláky na začátku července 2003. Každou úlohu řešilo průměrně 20 studentů z řad účastníků soustředění. Poté byly některé úlohy upraveny, některé zcela vynechány.

Vlastní výzkum využívající již upravených úloh probíhal na podzim roku 2003, konkrétně v říjnu a listopadu.

Kapitola 5

Analýza úloh

V této kapitole jsou úlohy roztříděny podle dovedností, jež měly především zkoumat. Poté je uveden komentář k výběru a vytváření úloh, dále pak popis jejich analýzy. V poslední podkapitole je provedena analýza testovaných úloh.

5.1 Přehled úloh z hlediska dovedností

Úlohy jsou číslovány tak, aby bylo zřejmé, v které variantě souboru úloh se nacházely a v jakém pořadí. Ke každé úloze jsou přiřazeny kódy dovedností (podle Kapitoly 3), jež jsou potřebné k vyřešené dané úlohy.

V této kapitole jsou úlohy řazeny podle dovednosti, kterou měly zkoumat *především*. Řazení je takto zvoleno kvůli lepší orientaci čtenáře. Následující tabulka uvádí stručný přehled, jak jsou úlohy zařazeny. Určení a označení dovedností vychází z Kapitoly 3. Pro lepší přehlednost je v tabulce uvedeno nejen označení dovednosti, ale i heslovitě popsáno, čeho se daná dovednost týká.

Tabulka 7:

dovednost		strana	číslo úlohy
I.b.1	měřítka na osách	27	B1-5
I.d.3	velikost × souřadnice vektorové veličiny	28	A2-5
I.d.5	rychlost kvalitativně	30	A1-7,B2-6, A1-6, A1-4, A2-8, B1-8, A2-7, A1-8
I.d.6, I.d.7	rychlost kvantitativně	36	B2-1, A2-3, B1-6, A1-9, B2-7
I.e.1	plocha pod grafem	45	A1-3, B2-4, A2-4, B2-2, B1-7
I.f.1	tvar křivky	52	B2-3
I.g.1	kvalitativní čtení grafu	54	B1-2, A1-5, B1-4, B1-3, A2-2, A2-6
I.d.1-I.g.1	**	60	A2-1, B1-1, A1-1
II.	sestrojení grafu	62	B2-5
II.b.1	kvalitativní náčrt grafu	63	A1-2

** úlohy zaměřeny na dovednosti I.d.1 a I.g.1; jsou uvedeny mimo své kategorie, protože cílem jejich zadání bylo zjistit porovnání mezi těmito dovednostmi

5.2 Výběr a vytváření úloh

Jak ukazuje Tabulka 7 v předcházející podkapitole, nebyl ve výzkumu kladen důraz na všechny dovednosti uvedené v Kapitole 3. Důvodem byl především rozsah souboru úloh (kvůli testování by na řešení nemělo být potřeba více času než jedna vyučovací hodina) a počet možných souborů úloh.

Dovednosti, jež budou především zkoumány (I.d.5, I.d.6, I.d.7, I.e.1 a I.g.1), byly vybrány na základě prostudování dosavadních studií. Zvolila jsem ty dovednosti, na něž se zaměřila většina studií, protože z toho plyne, že se jedná o dovednosti, jež řada autorů považuje za potřebné pro práci s grafy. Dále jsem vybrala dovednosti v přechozích studiích nezmiňované, a to tak, aby příklady vytvořené na jejich zkoumání byly z hlediska fyzikální obsahu vhodné pro co nejširší počet ročníků čtyřletých středních škol.

Domnívala jsem se, že by bylo zajímavé porovnat, jak studenti zvládají fyzikální příklady (zaměřené na grafy) a příklady zaměřené na tutéž dovednost, ale netýkající se přímo fyzikálního učiva. Z důvodu rozsahu testu jsem vytvořila „úlohy ze života" pro dovednosti týkající se kvalitativního a kvantitavního porovnání a určení rychlosti změny veličiny.

Úlohy byly vybírány a vytvářeny tak, aby se pokud možno daly vysledovat určité myšlenkové stupně použití daných dovedností. Proto jsou některé úlohy velmi jednoduché a postupně přibírají na obtížnosti. Ze stejného důvodu jsou v zadání některých úloh pouze malé rozdíly.

5.3 Popis analýzy úloh

U každé úlohy jsou uvedeny nejčastější odpovědi včetně jejich absolutních a relativních četností. Z důvodu výběru vzorku studentů, jenž je podrobněji rozebrán v podkapitole 4.3, je absolutní počet odpovědí ještě navíc udán pro každou střední školu zvlášť. Pokud se na některé SŠ výrazněji lišily výsledky mezi jednotlivými třídami, je absolutní počet uveden zvlášť i pro tyto třídy. Kvůli větší anonymitě jsou jednotlivé střední školy dále označeny symboly.

Odpovědi jsou okódovány následujícím způsobem:

	kód
- správná odpověď	označena *
- chybějící odpověď	9

U uzavřených úloh jsou kódy dalších odpovědí shodné s označením distraktorů. U úloh otevřených jsou dalším konkrétním odpovědím přiřazeny čísla — kódy, jenž jsou vysvětleny v kódovém klíči za tabulkou. Odpovědi, které uvádělo pouze malé procento studentů (méně než 4-5 %) jsou souhrnně uvedeny pod kódem 99–jiná odpověď. Pokud na některou chybu upozornily dosavadní studie, ale v tomto případě ji udělalo pouze zanedbatelné procento studentů, je tato chyba, kvůli porovnání, uvedena samostatně. Dále je pak uvedeno vzorové řešení otevřené úlohy.

Komentář k výsledkům úloh uvádím až v následující kapitole. Důvodem je skutečnost, že některé chybné postupy řešení dané úlohy vynikly zvláště v porovnání s odpověďmi u jiné úlohy. Dokonce některá možná chyba se projevila až při srovnání řešení několika úloh.

V Tabulce 8 jsou, převážně kvůli lepší orientaci čtenáře, uvedeny úspěšnosti jednotlivých úloh. Pro větší přehlednost jsou úlohy shrnuty do bloků, které jsou vymezeny intervaly úspěšnosti. Vzhledem k tomu, že metodou výzkumu nebyl didaktický test a cílem výzkumu není hodnocení studentů, jsou intervaly úspěšnosti stanoveny pouze orientačně, aby měl čtenář možnost zaměřit se na úlohy, jež např. dopadly hůře.

Tabulka 8:

interval úspěšnosti	úlohy
$\langle 85\ \%, 100\ \%)$	A2-4 a, A2-5 1a, B2-3 b
$\langle 67\ \%, 85\ \%)$	B2-3 a, B1-5 a, B1-8, A1-7, A1-3 b, A2-3 a, B1-2 a, B1-5 b B1-3, A2-7 1, A2-7 2, A2-8, A1-5 III., B1-6 a, B1-5 c, A2-3 d
$\langle 50\ \%, 67\ \%)$	B2-2 a, B1-6 d, A2-3 c, B2-3 c, A2-5 2, B1-2 c, B1-1, B1-4 III.
$\langle 33\ \%, 50\ \%)$	B2-1, A2-3 b, A1-8, A2-2 3, A2-6, B1-2 b, B1-4 II., B2-4 a B2-7, A2-1, B1-4 I., A2-2 1, B2-6 2, A1-6, A1-1, B1-6 b, B1-6 c
$\langle 0\ \%, 33\ \%)$	A1-5 I., A1-3 a, B2-5 B2-4 b, B2-2 b, A2-2 2, A2-4 b, B2-2 c, A1-4, B1-7, A1-9, A1-5 II., A2-5 1b, A1-2 a, A1-2 b A2-5 1c, B2-6 1a, B2-6 1b, B2-6 1c

5.4 Vlastní analýza úloh

Grafická podoba zadání úloh v této kapitole se liší od podoby, ve které byly úlohy skutečně zadávany, a to z důvodu jiné úpravy textu. Úlohy, tak jak byly skutečně zadány, jsou uvedeny v Příloze. Obsah zadání úloh v této kapitole a v Příloze je samozřejmě stejný.

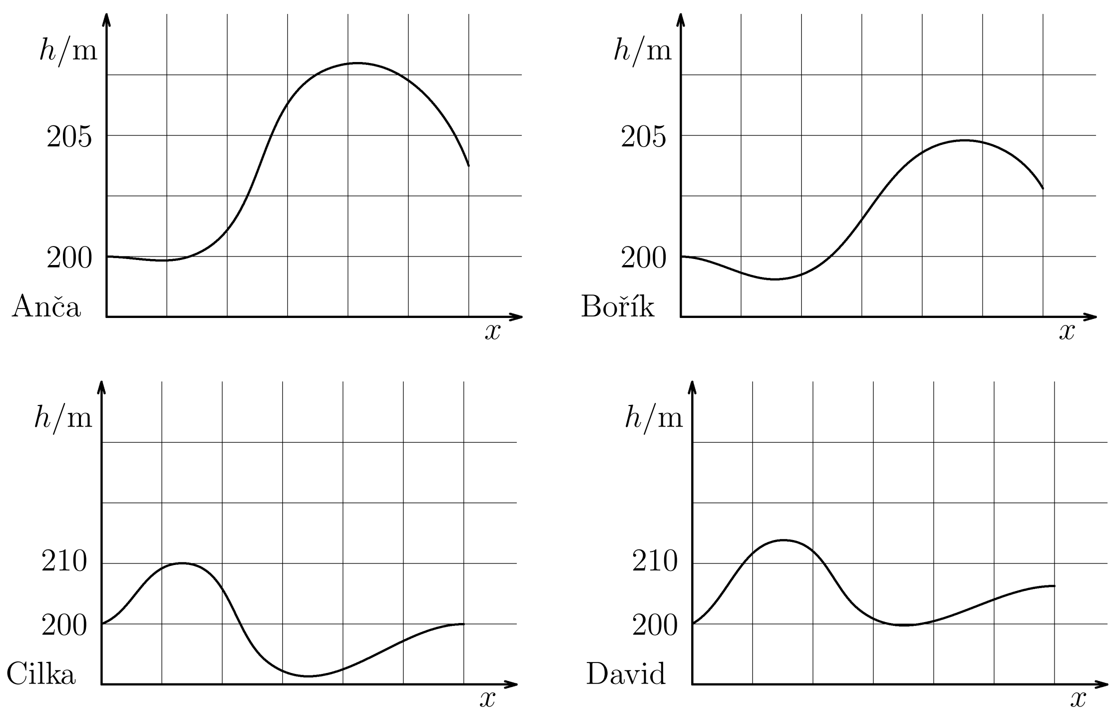
Úlohy jsou rozděleny do podkapitol podle třídění uvedeného již v Tabulce 7, které vystihuje, na jaké dovednosti jsou úlohy *především* zaměřeny. Jedná se o toto rozdělení podle dovedností:

- měřítka na osách
- velikost × souřadnice vektorové veličiny
- rychlost kvalitativně
- rychlost kvantitativně
- plocha pod grafem
- tvar křivky
- kvalitativní čtení z grafu
- porovnání dovedností I.g.1 a I.d.1
- sestrojení grafu
- kvalitativní náčrt grafu

5.4.1 Měřítka na osách

•	B1-5	požadované dovednosti: I.a.1, I.b.1, I.c.1, I.d.1

Čtyři sourozenci si vyšli za zábavou. Anča ke kamarádce, Bořík na tenisové kurty, Cilka na koupaliště a David do hospody. Výškové profily jejich tras jsou uvedeny níže.
a) Který z nich dosáhl během trasy nejvyšší nadmořské výšky?
b) Který z nich zdolal největší převýšení (=rozdíl mezi nejnižší a nejvyšší dosaženou nadmořskou výškou)?
c) Který z nich šel téměř po vrstevnici?



a)

kód	absolutní četnost α	β	δ	π	λ	ϱ	φ	absolutní četnost	relativní četnost
A	2	3	0	5	2	1	3	16	14,4 %
B	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0 %
C	1	0	0	1	0	0	0	2	1,8 %
D*	20	21	11	7	9	10	13	91	82,0 %
9	0	0	0	2	0	0	0	2	1,8 %

b)

kód	absolutní četnost α	β	δ	π	λ	ϱ	φ	absolutní četnost	relativní četnost
A	2	3	0	4	2	0	1	12	10,8 %
B	0	0	1	1	0	0	1	3	2,7 %
C*	18	21	8	3	9	11	14	84	75,7 %
D	3	0	2	5	0	0	0	10	9,0 %
9	0	0	0	2	0	0	0	2	1,8 %

c)

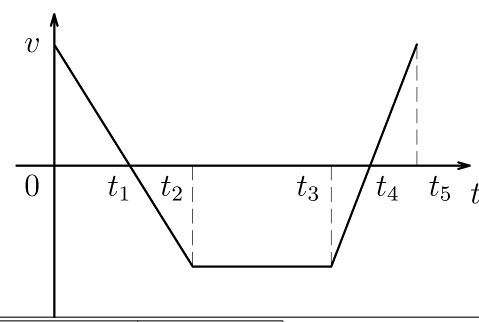
kód	absolutní četnost							absolutní	relativní
	α	β	δ	π	λ	ϱ	φ	četnost	četnost
A	2	3	1	0	0	0	0	6	5,4 %
B*	18	16	8	7	9	7	11	76	68,5 %
C	1	3	0	0	0	2	2	8	7,2 %
D	2	2	2	6	2	1	3	18	16,2 %
9	0	0	0	2	0	1	0	3	2,7 %

5.4.2 Velikost × souřadnice vektorové veličiny

• | A2-5 | požadované dovednosti: I.g.1, I.d.3 |
|---|---|

V grafu je vynesena závislost rychlosti (ve směru vozovky) auta jedoucího po rovné silnici na čase.

1. Určete, v kterých časových intervalech **velikost** rychlosti auta
a) byla konstantní
b) stoupala
c) klesala
2. Ve kterém časovém intervalu auto couvalo?



1.a)

kód	absolutní četnost								absolutní	relativní
	α	β	δ	π	ε	λ	φ	ϱ	četnost	četnost
*	28	13	15	21	6	12	14	12	121	91,0 %
9	0	0	0	0	8	0	0	0	8	6,0 %
99	0	1	1	0	0	1	1	0	4	3,0 %

Kódový klíč:
99–jiná odpověď
Správná odpověď: Velikost rychlosti auta byla konstantní v intervalu $(t_2,\ t_3)$.

1.b)

kód	absolutní četnost								absolutní	relativní
	α	β	δ	π	ε	λ	φ	ϱ	četnost	četnost
*	8	2	0	3	0	2	1	3	19	14,3 %
9	0	0	0	0	8	0	0	0	8	6,0 %
2	19	9	13	17	4	9	14	9	94	70,7 %
3	1	0	0	0	1	2	0	0	4	3,0 %
99	0	3	3	1	1	0	0	0	8	6,0 %

Kódový klíč:
2–uvádí interval $(t_3,\ t_5)$
3–uvádí interval $(t_4,\ t_5)$
99–jiná odpověď
Správná odpověď: Velikost rychlosti auta stoupala v intervalu $(t_1,\ t_2)\cup(t_4,\ t_5)$.

1.c)

kód	absolutní četnost								absolutní	relativní
	α	β	δ	π	ε	λ	φ	ϱ	četnost	četnost
*	8	0	0	3	0	2	1	1	15	11,3 %
9	0	0	1	0	8	0	0	0	9	6,8 %
2	15	6	8	13	5	5	11	8	71	53,4 %
3	1	2	5	4	0	4	2	2	20	15,0 %
4	4	0	0	0	0	2	1	1	8	6,0 %
99	0	6	2	1	1	0	0	0	10	7,5 %

Kódový klíč:
2–uvádí interval $(0,\ t_2)$
3–uvádí interval $(t_1,\ t_2)$
4–uvádí interval $(0,\ t_1)$
99–jiná odpověď
Správná odpověď: Velikost rychlosti auta klesala v intervalu $(0,\ t_1) \cup (t_3,\ t_4)$.

2.

kód	absolutní četnost								absolutní	relativní	relativní
	α	β	δ	π	ε	λ	φ	ϱ	četnost	četnost	četnost[1]
*	23	7	5	13	4	7	9	7	75	56,4 %	63,0 %
9	1	0	4	2	5	0	1	1	14	10,5 %	
2	2	3	2	1	1	4	0	1	14	10,5 %	11,8 %
3	1	0	1	0	0	0	3	1	6	4,5 %	5,0 %
4	0	0	0	3	0	1	0	0	4	3,0 %	3,4 %
99	2	4	4	2	2	1	3	2	20	15,0 %	16,8 %

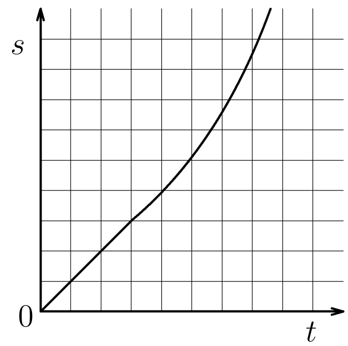
Kódový klíč:
2–uvádí interval $(t_1,\ t_2)$
3–uvádí interval $(0,\ t_2)$
4–uvádí interval $(t_3,\ t_5)$
99–jiná odpověď
Správná odpověď: Auto couvalo v intervalu $(t_1,\ t_4)$.

[1]relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

5.4.3 Rychlost kvalitativně

A1-7	požadované dovednosti: I.a.1, I.d.5

Na obrázku je graf závislosti dráhy běžícího nosorožce na čase. Vyberte správné tvrzení:
a) Rychlost nosorožce je stále konstantní.
b) Rychlost nosorožce je zpočátku konstantní, poté roste.
c) Rychlost nosorožce stále roste.
d) Žádná z uvedených možností.

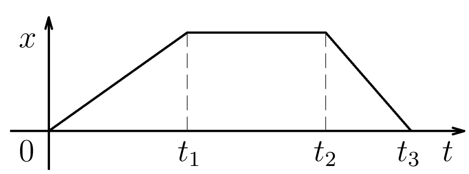


kód	absolutní četnost							absolutní	relativní
	α	β	γ	δ	π	ε	ϱ	četnost	četnost
a	0	1	0	0	0	0	1	2	1,5 %
b*	26	23	7	9	20	10	11	106	80,3 %
c	1	2	5	1	2	6	2	19	14,4 %
d	0	0	0	1	0	0	0	1	0,8 %
9	0	0	0	4	0	0	0	4	3,0 %

B2-6	požadované dovednosti: I.a.1, I.d.5

V grafu je vynesena závislost souřadnice auta jedoucího po rovné silnici na čase.

1. Určete, v kterých časových intervalech **velikost rychlosti** auta
a) byla konstantní
b) stoupala
c) klesala
2. V kterém časovém okamžiku či intervalu auto stálo?



	kód	absolutní četnost							absolutní	relativní	relativní
		α	β	γ	δ	π	λ	ϱ	četnost	četnost	četnost[1]
1.a)	*	4	0	0	0	0	3	3	10	8,3 %	9,5 %
	9	2	0	6	5	3	0	0	16	13,2 %	
	2	17	12	7	7	9	16	11	79	65,3 %	75,2 %
	99	2	2	1	0	2	9	0	16	13,2 %	15,2 %

[1]relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

Kódový klíč:
2–uveden interval $(t_1\,,\ t_2)$
99–jiná odpověď
Správná odpověď: Velikost rychlosti auta byla konstantní v těchto intervalech $(0\,,\ t_1) \cup (t_1\,,\ t_2) \cup (t_2\,,\ t_3)\,.$

		absolutní četnost							absolutní	relativní	relativní
	kód	α	β	γ	δ	π	λ	ϱ	četnost	četnost	četnost[1]
1.b)	*	5	0	0	0	0	8	3	16	13,2 %	15,5 %
	9	3	0	5	5	4	1	0	18	14,9 %	
	2	15	12	7	6	10	14	10	74	61,2 %	71,9 %
	99	2	2	2	1	0	5	1	13	10,7 %	12,6 %

Kódový klíč:
2–uveden interval $(0\,,\ t_1)$
99–jiná odpověď
Správná odpověď: Velikost rychlosti auta v časovém intervalu $(0\,,\ t_3)$ nestoupala.

		absolutní četnost							absolutní	relativní	relativní
	kód	α	β	γ	δ	π	λ	ϱ	četnost	četnost	četnost[1]
1.c)	*	5	0	0	0	0	7	3	15	12,4 %	14,4 %
	9	3	0	5	5	4	0	0	17	14,1 %	
	2	13	13	7	6	10	18	11	78	64,5 %	75,0 %
	99	4	1	2	1	0	3	0	11	9,1 %	10,6 %

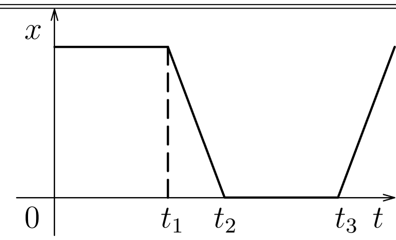
Kódový klíč:
2–uveden interval $(t_2\,,\ t_3)$
99–jiná odpověď
Správná odpověď: Velikost rychlosti auta v časovém intervalu $(0\,,\ t_3)$ neklesala.

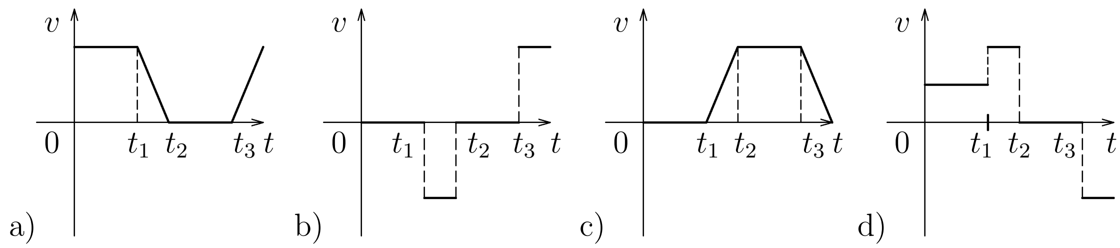
		absolutní četnost							absolutní	relativní	relativní
	kód	α	β	γ	δ	π	λ	ϱ	četnost	četnost	četnost[1]
2.	*	13	2	3	3	4	13	5	43	35,5 %	43,9 %
	9	3	0	7	7	5	1	0	23	19,0 %	
	2	7	8	1	2	5	12	8	43	35,5 %	43,9 %
	99	2	4	3	0	0	2	1	12	9,9 %	12,2 %

Kódový klíč:
2–uvedeny časové okamžiky t=0 s a t_3
99–jiná odpověď
Správná odpověď: Auto stálo v časovém intervalu $(t_1\,,\ t_2)$.

• A1-6	požadované dovednosti: III.b.1 ⇒ I.a.1, I.d.5, II.b.1

Na obrázku je graf závislosti souřadnice na čase. Která z následujících závislostí rychlosti na čase $v(t)$ popisuje tentýž pohyb? (v je rychlost ve směru osy x .)

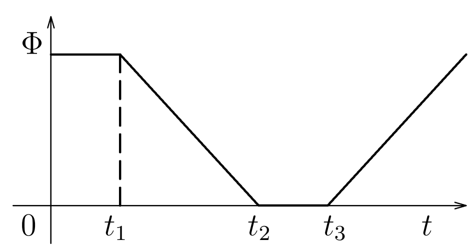


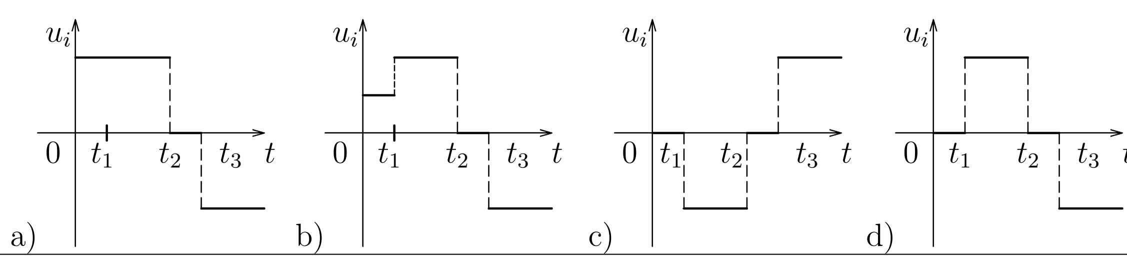


kód	absolutní četnost							absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
	α	β	γ	δ	π	ε	ϱ			
a	6	13	7	3	10	2	6	47	35,6 %	39,8 %
b*	19	9	2	2	4	6	3	45	34,1 %	38,1 %
c	1	2	1	5	7	3	3	22	16,7 %	18,6 %
d	1	1	0	0	1	0	1	4	3,0 %	3,4 %
9	0	1	2	5	0	5	1	14	10,6 %	

• A1-4	požadované dovednosti: III.b.1 ⇒ I.a.1, I.d.5, II.b.1

Kovový náramek jsme vysouvali a zasouvali do magnetického pole. Závislost magnetického indukčního toku Φ náramkem na čase je vynesena v grafu. Jaký časový průběh mělo napětí u_i, které se indukovalo v tomto náramku? (Nápověda: $u_i = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, kde $\Delta\Phi$ je změna Φ za přírůstek času Δt .)





[1] relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

	absolutní četnost							absolutní	relativní	relativní
kód	α	β	γ	δ	π	ε	ϱ	četnost	četnost	četnost[1]
a	2	2	0	0	2	0	1	7	5,3 %	7,1 %
b	1	4	3	1	3	0	6	18	13,6 %	18,4 %
c	12	13	0	3	14	3	2	47	35,6 %	48,0 %
d*	12	5	1	1	3	0	4	26	19,7 %	19,7 %
9	0	2	8	10	0	13	1	34	25,8 %	

- | A2-8 | požadované dovednosti: I.a.1, I.b.1, I.c.1, I.d.8 |

V grafu dole je zaznamenáno, jak se mění věk dožití během posledních třiceti let.
V letech 1994 - 1998 se věk dožití se u žen v průměru:
a) zvětšuje přibližně stejně rychle jako u mužů
b) zvětšuje se pomaleji než u mužů
c) zvětšuje se rychleji než u mužů

	absolutní četnost								absolutní	relativní
kód	α	β	δ	π	ε	λ	φ	ϱ	četnost	četnost
a*	20	12	11	15	4	12	11	8	93	69,9 %
b	7	1	2	4	3	1	3	1	22	16,5 %
c	1	1	2	1	1	0	0	3	9	6,8 %
9	0	0	1	1	6	0	1	0	9	6,8 %

[1] relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

• | B1-8 | požadované dovednosti: I.a.1, I.d.8 |
|---|---|

V grafu dole je zaznamenáno množství emisí CO_2 v ČR. Černou křivkou jsou vyznačeny předpokládané hodnoty, bílá křivka ilustruje skutečné naměřené hodnoty. Skutečné snížení emisí (bílá barva) na počátku 90. let proběhlo oproti předpokládanému (černá barva):

a) stejně rychle
b) pomaleji
c) rychleji

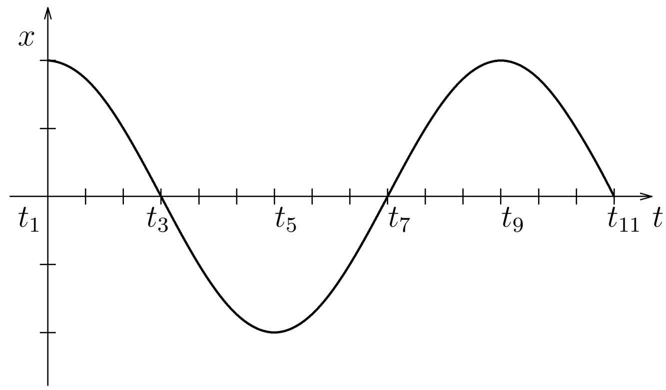
kód	absolutní četnost							absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
	α	β	δ	π	λ	ϱ	φ			
a	0	0	1	0	0	1	0	2	1,8 %	2,0 %
b	2	1	2	0	1	0	0	6	5,4 %	6,1 %
c*	21	21	7	6	10	9	16	91	82,0 %	92,0 %
9	0	2	1	8	0	1	0	12	10,8 %	

[1] relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

• A2-7	požadované dovednosti: I.a.1, I.d.5, I.d.7

Na obrázku je závislost souřadnice závaží zavěšeného na pružině na čase. (V čase t_1 je pružina vychýlena směrem nahoru.)

1. Ve kterých časových okamžicích je velikost rychlosti závaží nulová?
   a) t_3 , t_7 , t_{11} ,
   b) t_1 , t_3 , t_7 , t_{11} ,
   c) t_1 , t_5 , t_9 .



2. Ve kterých časových okamžicích je velikost rychlosti závaží maximální?
   a) t_3 , t_7 , t_{11} ,
   b) t_1 , t_3 , t_7 , t_{11} ,
   c) t_1 , t_5 , t_9 .

	kód	absolutní četnost								absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
		α	β	δ	π	ε	λ	φ	ϱ			
1.	a	1	2	3	5	3	2	4	2	22	16,5 %	17,9 %
	b	0	0	3	0	0	0	1	1	5	3,8 %	4,1 %
	c*	27	12	9	16	3	11	10	8	96	72,2 %	78,1 %
	9	0	0	1	0	8	0	0	1	10	7,5 %	

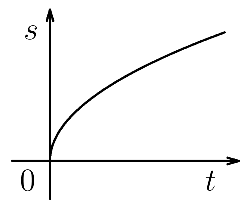
	kód	absolutní četnost								absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
		α	β	δ	π	ε	λ	φ	ϱ			
2.	a*	26	10	10	16	3	11	11	8	95	71,4%	77,2 %
	b	1	2	0	0	0	0	0	1	4	3,0%	3,3 %
	c	1	2	5	5	3	2	4	2	24	18,1%	19,5 %
	9	0	0	1	0	8	0	0	1	10	7,5%	

[1]relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

• | A1-8 | požadované dovednosti: I.a.1, I.d.5 |
|---|---|

V grafu je znázorněn pohyb tělesa. s je dráha pohybu a t čas. Křivkou je část paraboly.

Velikost rychlosti tělesa při tomto pohybu:
a)byla konstantní a nenulová
b)klesala
c)stoupala
d)byla nulová

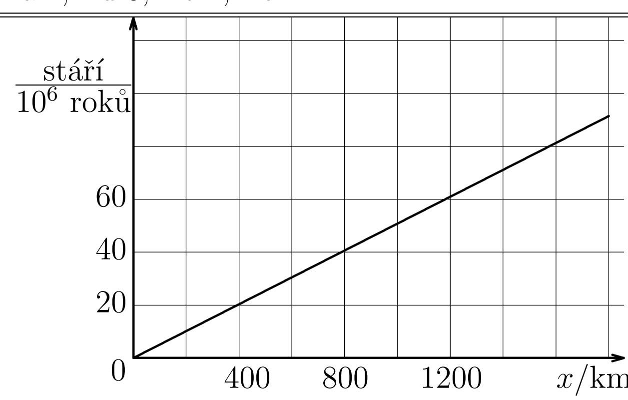


kód	absolutní četnost							absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
	α	β	γ	δ	π	ε	ϱ			
a	1	2	1	0	2	4	1	11	8,3 %	9,2 %
b*	6	18	6	2	16	4	7	59	44,7 %	49,6 %
c	20	6	2	3	4	8	5	48	36,4 %	40,3 %
d	0	0	1	0	0	0	0	1	0,8 %	0,8 %
9	0	0	2	10	0	0	1	13	9,9 %	

5.4.4 Rychlost kvantitativně

• | B2-1 | požadované dovednosti: I.a.1, I.d.6, I.b.1, I.c.1 |
|---|---|

Hornina uvolněná z oceánského hřbetu se pomalu vzdaluje od jeho paty přibližně konstantní rychlostí. Graf na obrázku znázorňuje, jak se vzdálenost horniny od hřbetu mění s časem. Vypočtěte rychlost posuvu horniny v km za rok.



kód	absolutní četnost							absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
	α	β	γ	δ	π	λ	ϱ			
*	15	6	0	5	5	18	9	59	48,8 %	56,2 %
9	2	1	9	3	1	0	0	16	13,2 %	
11	0	1	3	2	0	0	1	7	5,8 %	6,7 %
2	0	0	0	0	0	1	1	2	1,7 %	1,9 %
3	8	6	2	2	5	8	3	34	28,1 %	32,4 %
4	0	0	0	0	1	1	0	2	1,7 %	1,9 %
99	0	0	0	0	1	0	0	1	0,8 %	1,0 %

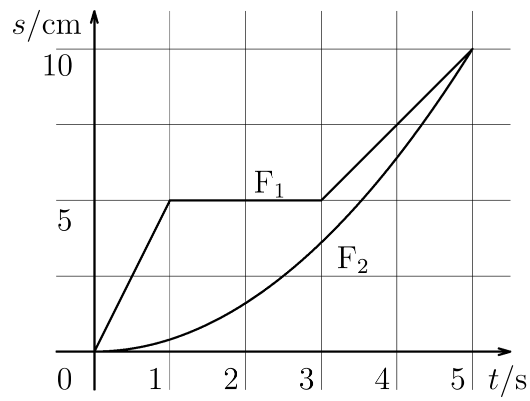
[1] relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

Kódový klíč:
11–uveden správný postup, ale špatný převod jednotek
2–uveden správný postup, ovšem s numerickou chybou ve výpočtu
3–uveden správný postup, ale není započítán řád 10^6 roků
4–při odečítání z grafu je zaměněno s a t.
99–jiná odpověď

Vzorové řešení:
Průměrnou rychlost posuvu spočteme dle vzorce: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, kde z grafu odečteme např. pro $\Delta x = 400$ km změnu $\Delta t = 20 \cdot 10^6$ km. Po dosazení dostáváme
$v = 2 \cdot 10^{-5}$ km/rok.

• | A2-3 | požadované dovednosti: I.a.1, I.d.6, I.b.1, I.c.1 |
|---|---|

Na obr. je graf závislosti uražené dráhy na čase dvou mravenců F_1 a F_2. Vypočtěte:
a) velikost rychlosti mravence F_1 mezi 0. a 1. sekundou jeho pohybu
b) průměrnou rychlost mravence F_1 mezi 1. a 3. sekundou jeho pohybu
c) průměrnou rychlost mravence F_1 během celého pohybu
d) průměrnou rychlost mravence F_2 během celého pohybu



	kód	absolutní četnost								absolutní	relativní	relativní
		α	β	δ	π	ε	λ	φ	ϱ	četnost	četnost	četnost[1]
	*	22	11	12	19	1	13	13	11	102	76,7 %	84,3 %
a)	9	0	0	0	0	12	0	0	0	12	9,0 %	
	11	5	3	2	2	0	0	0	0	12	9,0 %	9,9 %
	2	1	0	0	0	0	0	1	1	3	2,3 %	2,5 %
	3	0	0	2	0	0	0	1	0	3	2,3 %	2,5 %
	4	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0,8 %	0,8 %

Kódový klíč:
11–uvedena správná numerická hodnota, ale chybné jednotky
2–uveden správný postup, ale s numerickou chybou ve výpočtu
3–daný pohyb je považován za zrychlený
4–odečtení hodnoty 5 (bez jednotky)

Vzorové řešení:
Velikost rychlosti mravence spočteme podle vztahu: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, kde $\Delta s = 5$ cm a $\Delta t = 1$ s. Velikost rychlosti je tedy $v = 5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

[1]relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

b)

kód	absolutní četnost								absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
	α	β	δ	π	ε	λ	φ	ϱ			
*	14	4	5	12	1	11	7	9	63	47,4 %	52,9 %
9	2	0	0	0	12	0	0	0	14	10,5 %	
11	3	2	1	1	0	0	0	0	7	5,3 %	5,9 %
2	7	5	1	2	0	1	3	1	20	15,0 %	16,8 %
3	0	1	4	3	0	0	3	1	12	9,0 %	10,1 %
4	1	0	1	2	0	1	0	0	5	3,8 %	4,2 %
99	1	2	4	1	1	0	2	1	12	9,0 %	10,1 %

Kódový klíč:
11–uvedena správná numerická hodnota, ale chybné jednotky
2–k výpočtu užívá vzorce $v = \frac{s}{t}$ pro $s = 5$ cm a $t = 3$ s
3–k výpočtu užívá vzorce $v = \frac{s}{\Delta t}$ pro $s = 5$ cm a $\Delta t = 2$ s
4–odečtení hodnoty 5 (bez jednotky)
99–jiná odpověď

Vzorové řešení:
Průměrnou rychlost mravence spočteme podle vztahu: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, kde $\Delta s = 0$ cm a $\Delta t = 2$ s. Průměrná rychlosti je tedy $v = 0\ \mathrm{cm \cdot s^{-1}}$. Velmi jednoduše lze úlohu vyřešit, pokud si všimneme toho, že daná část grafu vyjadřuje skutečnost, že mravenec stojí. Pak získáme výsledek okamžitě.

c)

kód	absolutní četnost								absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
	α	β	δ	π	ε	λ	φ	ϱ			
*	18	6	6	14	1	13	9	9	76	57,1 %	65,5 %
9	2	0	3	0	12	0	0	0	17	12,8 %	
11	2	2	1	1	0	0	0	0	6	4,5 %	5,2 %
2	2	0	1	3	0	0	3	2	11	8,3 %	9,5 %
3	4	1	3	1	0	0	1	0	10	7,5 %	8,6 %
4	0	0	2	0	0	0	0	0	2	1,5 %	1,7 %
99	0	5	0	2	1	0	2	1	11	8,3 %	9,5 %

Kódový klíč:
11–uvedena správná numerická hodnota, ale chybné jednotky
2–rychlosti jsou spočítány ve třech intervalech (odpovídajících zlomům křivky) a zprůměrovány, kokrétně $v = \frac{(5 + 0 + 2,5)\ \mathrm{cm \cdot s^{-1}}}{3} = 2,5\ \mathrm{cm \cdot s^{-1}}$
3–provádí stejné myšlenkové úvahy jako v 2, ale rychlost v prostředním úseku neuvádí nulovou
4–celý pohyb mravence je rozdělen na 5 rovnoměrných časových intervalů, průměrná rychlost je pak počítána podobně jako v 2
99–jiná odpověď

[1]relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

Vzorové řešení:
Velikost rychlosti mravence spočteme podle vztahu: $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, kde $\Delta s = 10$ cm a $\Delta t = 5$ s. Velikost rychlosti je tedy $v = 2\ \mathrm{cm \cdot s^{-1}}$

d)

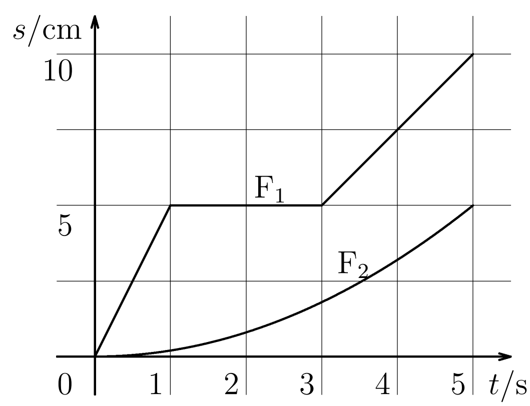
	absolutní četnost								absolutní	relativní	relativní
kód	α	β	δ	π	ε	λ	φ	ϱ	četnost	četnost	četnost[1]
*	22	8	6	18	1	13	12	10	90	67,7 %	83,3 %
9	1	1	9	0	12	0	1	1	25	18,8 %	
11	3	3	1	3	0	0	0	0	10	7,5 %	9,3 %
2	1	0	0	0	0	0	0	1	2	1,5 %	1,9 %
99	1	2	0	0	1	0	2	0	6	4,5 %	5,6 %

Kódový klíč:
11–uvedena správná numerická hodnota, ale chybné jednotky
2–uveden správný postup, ale numerická chyba ve výpočtu
99–jiná odpověď

Vzorové řešení:
Velikost rychlosti mravence spočteme podle vztahu: $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, kde $\Delta s = 10$ cm a $\Delta t = 5$ s. Velikost rychlosti je tedy $v = 2\ \mathrm{cm \cdot s^{-1}}$

B1-6	požadované dovednosti: I.a.1, I.b.1, I.c.1, I.d.6, I.d.7

Na obr. je graf závislosti uražené dráhy na čase dvou mravenců F_1 a F_2. Vypočtěte:
a) rychlost mravence F_1 mezi 3. a 5. sekundou jeho pohybu
b) průměrnou rychlost mravence F_1 mezi 2. a 4. sekundou jeho pohybu
c) okamžitou rychlost mravence F_1 4. sekundu jeho pohybu
d) průměrnou rychlost mravence F_2 během celého pohybu



[1]relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

a)

kód	absolutní četnost α	β	δ	π	λ	ϱ	φ	absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
*	15	18	6	7	10	8	13	77	69,4 %	75,5 %
9	0	1	3	5	0	0	0	9	8,1 %	
11	5	3	0	3	0	0	0	11	9,9 %	10,8 %
2	0	0	0	0	1	0	0	1	0,9 %	1,0 %
3	0	0	1	0	0	0	2	3	2,7 %	2,9 %
4	1	0	1	0	0	0	0	2	1,8 %	2,0 %
99	0	0	0	0	0	3	1	8	7,2 %	7,8 %

Kódový klíč:
11–uvedena správná numerická hodnota, ale chybné jednotky
2–uveden správný postup, ale numerická chyba ve výpočtu
3–odečítá hodnotu dráhy v čase 3 s nebo 4 s nebo 5 s
4–k výpočtu užívá vzorce $v = \frac{s}{t}$ pro $s = 10$ cm a $t = 5$ s
99–jiná odpověď

Vzorové řešení:
Průměrná rychlosti mravence spočteme podle vztahu: $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, kde $\Delta s = 5$ cm a $\Delta t = 2$ s. Velikost rychlosti je tedy $v = 2,5\ \mathrm{cm \cdot s^{-1}}$.

b) U této otázky kvůli nevhodně zvolenému časovému intervalu nebylo možné, pokud student neuvedl postup řešení, zjistit, zda byla úloha řešena správně či nikoliv. Jestliže student počítal rychlost postupem uvedeným v kódu 4, vyšel mu, kvůli takto zvolenému intervalu, stejný výsledek jako při správném řešení. Studenty, kteří nezdůvodnili výsledek, bylo nutné pro tuto úlohu ze souboru vyloučit. Celkový počet testovaných na tuto otázku je tedy 101.

kód	absolutní četnost α	β	δ	π	λ	ϱ	φ	absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
*	8	10	3	3	4	5	2	35	34,7 %	41,2 %
9	1	3	3	6	1	1	1	16	15,8 %	
11	2	1	0	3	0	0	0	6	5,9 %	7,1 %
2	0	0	1	0	0	0	0	1	1,0 %	1,2 %
3	2	2	1	0	0	0	0	5	5,0 %	5,9 %
4	3	1	1	2	2	1	2	12	11,9 %	14,1 %
5	1	0	0	0	0	1	2	4	4,0 %	4,7 %
6	0	0	0	0	2	0	2	4	4,0 %	4,7 %
7	1	1	0	0	0	0	1	3	3,0 %	3,5 %
99	0	4	0	0	2	3	6	15	14,9 %	17,7 %

[1]relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

Kódový klíč:
11–uvedena správná numerická hodnota, ale chybné jednotky
2–uveden správný postup, ale ve výpočtu je numerická chyba
3–uveden správný obecný postup, ale jsou špatně odečteny hodnoty z grafu - kvůli měřítku
4–počítán aritmetický průměr z průměrných rychlostí mezi 2. a 3. sekundou a mezi 3. a 4. sekundou
5–uvádí, že mezi 2. a 3. sekundou mravenec stojí a proto požadovanou rychlost počítá pouze jako průměrnou rychlost mezi 3. a 4. sekundou
6–k výpočtu užívá vzorce $v = \frac{s}{t}$ pro $s = 7,5$ cm a $t = 4$ s
7–k výpočtu užívá vzorce $v = \frac{s}{\Delta t}$ pro $s = 7,5$ cm a $\Delta t = 1; 2; 3$ s
99–jiná odpověď

Vzorové řešení:
Velikost rychlosti mravence spočteme podle vztahu: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, kde $\Delta s = 2,5$ cm a $\Delta t = 2$ s. Velikost rychlosti je tedy $v = 1,25\ \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$

c)

kód	absolutní četnost							absolutní	relativní	relativní
	α	β	δ	π	λ	ϱ	φ	četnost	četnost	četnost[1]
*	13	9	2	0	2	5	6	37	33,3 %	43,0 %
9	2	4	6	8	3	2	0	25	22,5 %	
11	3	2	0	3	0	0	0	8	7,2 %	9,3 %
2	3	6	0	2	6	1	3	21	18,9 %	24,4 %
3	0	1	1	1	0	0	5	8	7,2 %	9,3 %
99	2	2	2	1	0	3	2	12	10,8 %	14,0 %

Kódový klíč:
11–uvedena správná numerická hodnota, ale chybné jednotky
2–k výpočtu užívá vzorce $v = \frac{s}{t}$ pro $s = 7,5$ cm a $t = 4$ s
3–pouze odečítá hodnotu z grafu, konkrétně 7,5 (bez jednotek)
99–jiná odpověď

Vzorové řešení:
Velikost rychlosti mravence spočteme podle vztahu: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, kde $\Delta s = 2,5$ cm a $\Delta t = 2$ s. Velikost rychlosti je tedy $v = 2,5\ \text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$, nebo snadno nahlédneme, že v tomto úseku se mravenec pohybuje konstantní rychlostí, tedy v okamžiku 4. s bude jeho rychlost stejná jako v předchozím případě.

d)

kód	absolutní četnost							absolutní	relativní	relativní
	α	β	δ	π	λ	ϱ	φ	četnost	četnost	četnost[1]
*	18	14	7	5	8	9	11	72	64,9 %	80,0 %
9	1	6	4	6	1	1	2	21	18,9 %	
11	3	2	0	3	0	0	0	8	7,2 %	8,9 %
99	1	2	0	1	2	1	3	10	9,0 %	11,1 %

[1] relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

Kódový klíč:
11–uvedena správná numerická hodnota, ale chybné jednotky
2–uveden správný postup, ale numerická chyba ve výpočtu
99–jiná odpověď

Vzorové řešení:
Velikost rychlosti mravence spočteme podle vztahu: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, kde $\Delta s = 5$ cm a $\Delta t = 5$ s. Velikost rychlosti je tedy $v = 1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

• A1-9	požadované dovednosti: I.a.1, I.b.1, I.c.1, I.d.4, I.d.6

Graf uvedený níže popisuje, jak probíhalo kácení deštných pralesů v 90. letech minulého století. Hodnota v každém roce udává, kolik plochy deštných pralesů bylo do té doby celkem vykáceno. Určete, kolik km^2 se průměrně vykácelo za rok v období od roku 1989 do roku 1993.

kód	absolutní četnost							absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
	α	β	γ	δ	π	ε	φ			
*	6	7	0	0	2	0	6	21	15,9 %	21,7 %
9	1	2	5	12	2	10	0	32	24,2 %	
11	6	7	1	0	11	0	0	25	18,9 %	25,8 %
2	4	2	4	1	2	0	2	15	11,4 %	15,5 %
3	7	1	0	2	3	3	4	17	12,9 %	17,5 %
4	1	1	0	0	0	0	0	2	1,5 %	2,1 %
5	0	0	0	0	0	3	0	3	2,3 %	3,1 %
99	2	6	2	0	2	0	2	14	10,6 %	14,4 %

Kódový klíč:
2–pouze od sebe odečítá hodnoty v krajních letech
3–počítá artimetický průměr z hodnot příslušících krajním rokům
4–odečítá od sebe hodnoty v krajních letech, jež následně dělí dvěma
5–hodnotu v roce 1989 dělí požadovaným intervalem let, tj. pěti roky

Vzorové řešení:
Průměrnou plochu spočteme dle vzorce $S = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$, kde $\Delta S = S_{1994} - S_{1989} \doteq (470\ 000 - 400\ 000)\ \mathrm{km}^2 = 70\ 000\ \mathrm{km}^2$, $\Delta t = 5$ let. Po dosazení tedy dostáváme $S \doteq 14\ 000\ \mathrm{km}^2$.

Poznámka: Někteří studenti odečítali plochu vykácenou až do konce roku 1993 právě u tohoto data a nikoliv na začátku roku 1994. Vzhledem k tomu, že v zadání nebylo zdůrazněno, odkdy je uváděn začátek roku, počítala jsem tyto výpočty také mezi správné. Jsou jich $\frac{2}{3}$ ze všech správných odpovědí.

[1] relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

• | B2-7 | požadované dovednosti: I.a.1, I.b.1, I.c.1, I.d.6 |

V grafu dole je zaznamenán počet obyvatel (v miliardách) v jednotlivých stoletích v rozvojových a vyspělých zemích. Určete průměrný přírůstek obyvatel za rok ve 20. století v rozvojových zemích.

	absolutní četnost							absolutní	relativní	relativní
kód	α	β	γ	δ	π	λ	ϱ	četnost	četnost	četnost[1]
*	14	6	1	1	3	17	6	48	39,7 %	61,5 %
9	3	4	10	9	11	5	1	43	35,5%	
11	0	0	0	0	0	0	3	3	2,5 %	3,9 %
2	5	1	0	0	0	1	0	7	5,8 %	9,0 %
3	0	1	1	0	0	0	0	2	1,7 %	2,6 %
4	1	0	1	2	0	2	1	7	5,8 %	9,0 %
99	2	2	1	0	0	3	3	11	9,1 %	14,1 %

Kódový klíč:
11–uvádí správnou numerickou hodnotu, ale s chybnými jednotkami
2–uvádí správný postup, ale ve výpočtu je numerická chyba
3–uvádí správně obecný postup, ale počítá s jiným časovým intervalem („od kraje do kraje")
4–pouze od sebe odečítá hodnoty počtu obyvatel na začátku a konci 20. století
99–jiná odpověď

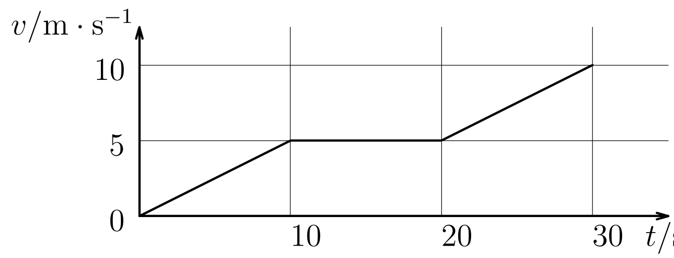
Vzorové řešení:
Průměrný přírůstek obyvatel spočteme dle vzorce $P = \dfrac{\Delta P}{\Delta t}$, kde $\Delta P = P_{2000} - {}_{1900} \doteq (6,3 - 1,6) \cdot 10^9$ obyvatel $= 4,7 \cdot 10^9$ obyvatel, $\Delta t = 100$ let. Po dosazení tedy dostáváme $P \doteq 47$ miliónů obyvatel za rok.

[1] relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

5.4.5 Plocha pod grafem

• A1-3	požadované dovednosti: I.a.1, I.b.1, I.c.1, I.e.1

Na obrázku je graf závislosti rychlosti jedoucího cyklisty na čase.
a) Jakou dráhu ujel během prvních pěti sekund?
b) Jakou dráhu ujel mezi 10. a 20. sekundou?



a)

kód	absolutní četnost α	β	γ	δ	π	ε	ϱ	absolutní četnost	relativní četnost
*	15	6	3	5	2	6	1	38	28,8 %
9	0	1	0	5	0	3	0	9	6,8 %
11	1	0	0	0	0	0	1	2	1,5 %
2	3	7	3	1	14	0	6	34	25,8 %
3	3	5	0	2	2	5	1	18	13,6 %
4	0	3	2	1	2	2	2	12	9,1 %
99	5	4	4	1	2	0	3	19	14,4 %

Kódový klíč:
11–uvádí správnou numerickou hodnotu, ale chybné jednotky
2–odečte rychlost cyklisty v 5. sekundě pohybu, ale k vypočtení dráhy použije vzorec $s = v \cdot t$, což je pro konkrétní hodnoty 12,5 m.
3–počítá dráhu podle vzorce $s = v \cdot t$, kde $v = 2,5$ m·s^{-1} a $t = 10$ s
4–k výpočtu užívá trojčlenku: 10 s odpovídá 5 m, 5 s odpovídá x m $\Rightarrow x = 2,5$ m.

Vzorové řešení:
Dráhu cyklisty spočteme jako obsah plochy pod grafem: $s = \frac{v \cdot t}{2}$, kde $v = 2,5$ m·s^{-1} a $t = 5$ s. Dráha je tedy $s = 6,25$ m.

b)

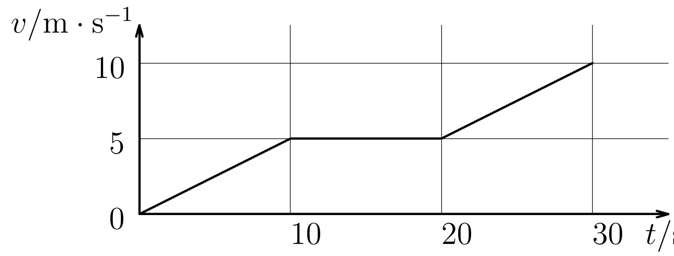
kód	absolutní četnost α	β	γ	δ	π	ε	ϱ	absolutní četnost	relativní četnost
*	26	23	8	8	19	12	9	105	79,6 %
9	0	1	1	5	0	2	0	9	6,8 %
11	0	0	0	0	0	0	1	1	0,8 %
2	0	2	1	1	2	1	2	9	6,8 %
3	0	0	2	0	0	0	0	2	1,5 %
99	1	0	0	1	1	1	2	6	4,6 %

Kódový klíč:
11–uvádí správnou numerickou hodnotu, ale chybné jednotky
2–uvádí 0 m
3–odečítá hodnotu 5 m
99–jiná odpověď

Vzorové řešení:
Dráhu cyklisty spočteme jako obsah plochy pod grafem: $s = v \cdot \Delta t$, kde $v = 5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a $\Delta t = 10\ \mathrm{s}$. Dráha je tedy $s = 50\ \mathrm{m}$.

• B2-4	požadované dovednosti: I.a.1, I.b.1, I.c.1, I.e.1

Na obrázku je graf závislosti rychlosti jedoucího cyklisty na čase.
a) Jakou dráhu ujel během prvních deseti sekund?
b) Jakou dráhu ujel mezi 20. a 30. sekundou?



a)

kód	absolutní četnost α	β	γ	δ	π	λ	ϱ	absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
*	19	5	1	7	1	10	5	48	39,8 %	42,9 %
9	0	1	1	2	5	0	0	9	7,4 %	
2	2	0	1	0	0	0	0	3	2,5 %	2,7 %
3	2	8	7	3	6	17	7	50	41,3 %	44,6 %
99	2	0	4	0	2	1	2	11	9,1 %	9,8 %

Kódový klíč:
2–uvádí správné obecné řešení, ale ve výpočtu numerická chyba
3–odečte rychlost cyklisty v 10. sekundě pohybu, ale k vypočtení dráhy použije vzorec $s = v \cdot t$, což je pro konkrétní hodnoty 50 m.
99–jiná odpověď

Vzorové řešení:
Dráhu cyklisty spočteme jako obsah plochy pod grafem: $s = \frac{v \cdot t}{2}$, kde $v = 5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a $t = 10\ \mathrm{s}$. Dráha je tedy $s = 25\ \mathrm{m}$.

[1] relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

b)

kód	absolutní četnost							absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
	α	β	γ	δ	π	λ	ϱ			
*	14	2	0	4	0	6	4	30	24,8 %	27,8 %
9	0	1	4	3	5	0	0	13	10,7 %	
2	2	0	0	1	0	0	0	3	2,5 %	2,8 %
3	3	4	6	1	3	10	5	32	26,4 %	29,6 %
4	0	4	0	1	1	5	2	13	10,7 %	12,0 %
5	1	1	0	1	3	3	1	10	8,3 %	9,3 %
99	5	2	4	1	2	4	2	20	16,5 %	18,5 %

Kódový klíč:
2–uvádí správné obecné řešení, ale ve výpočtu numerická chyba
3–k výpočtu dráhy použije vzorec $s = \Delta v \cdot \Delta t$, kde $\Delta v = 5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a $\Delta t = 10$ s
4–k výpočtu dráhy použije vzorec $s = v \cdot \Delta t$, kde $v = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a $\Delta t = 10$ s
5–k výpočtu dráhy použije vzorec $s = \frac{v}{2} \cdot \Delta t$, kde $v = 5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a $\Delta t = 10$ s
99–jiná odpověď

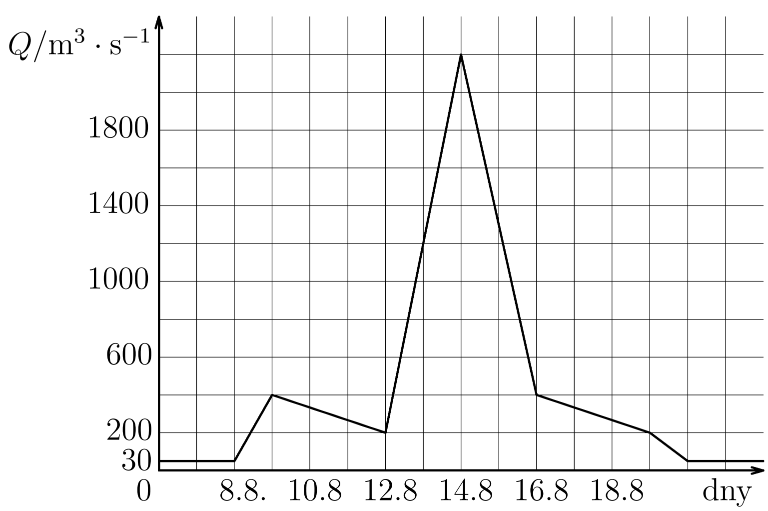
Vzorové řešení:
Dráhu cyklisty spočteme jako obsah plochy pod grafem: $s = \dfrac{(v_1 + v_2) \cdot \Delta t}{2}$, kde $v_1 = 5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_2 = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a $\Delta t = 10$ s. Dráha je tedy $s = 75$ m.

• A2-4	požadované dovednosti: I.a.1, I.b.1, I.c.1, I.c.2, I.e.1

Na obrázku je zaznamenán průběh povodní v roce 2002 na Berounce v Berouně tj. průtok v $\mathrm{m^3.s^{-1}}$ v jednotlivých dnech. Normální průtok Berounkou je přibližně $30\ \mathrm{m^3.s^{-1}}$.

a) Termínem *kulminace* se označuje dosažení nejvyššího průtoku během povodní. Určete, který den řeka Berounka kulminovala.

b) Vypočtěte, kolik $\mathrm{m^3}$ vody proteklo Berounem od 9. do 12. srpna. (Uvažujte 1 den $\approx$ 24 h $\approx$ 86 000 s.)



a)

kód	absolutní četnost								absolutní četnost	relativní četnost
	α	β	δ	π	ε	λ	φ	ϱ		
*	28	14	14	21	7	13	15	12	124	93,2 %
9	0	0	2	0	7	0	0	0	9	6,8 %

b)

kód	absolutní četnost								absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
	α	β	δ	π	ε	λ	φ	ϱ			
*	9	4	2	4	0	4	4	3	30	22,6 %	31,3 %
9	1	2	13	5	12	2	2	0	37	27,8 %	
2	12	3	0	5	0	4	3	4	31	23,3 %	32,3 %
3	2	2	1	0	0	0	0	0	5	3,8 %	5,2 %
4	0	0	0	0	0	1	2	1	4	3,0 %	4,2 %
99	4	3	0	7	2	2	4	4	26	19,6 %	27,1 %

Kódový klíč:
2–celkový objem vody počítá dle vzorce $V = Q \cdot t$, kde za Q dosazuje $300\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$, za t dosazuje 4 dny převedené na sekundy
3–uvádí $V = 200\ \mathrm{m^3}$
4–k výpočtu celkového objemu používá chybný vzorec; např. $V = \frac{Q}{t}$, $Q = \frac{t}{V}$, což má za následek kuriózní odpovědi, např. celkový objem vody, která protekla Berounem během prvních dní povodní, byl $10^{-3}\ \mathrm{m^3}$.
99–jiná odpověď

Vzorové řešení:
Objem vody spočteme jako obsah plochy pod grafem. Objem vody připadající na jeden čtvereček je $V_0 = \Delta Q \cdot \Delta t$, kde $\Delta Q = 200\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$ a $\Delta t = 1$ den ≈ 86000 s. V_0 je tedy $1,72 \cdot 10^7\ \mathrm{m^3}$. Plocha pod grafem v daném intervalu dní obsahuje 8 čtverečků. Celkový objem proteklé vody je $V = 8V_0 = 1,4 \cdot 10^8\ \mathrm{m^3}$.

Poznámka 1: Vzhledem k nepřesnému vymezení časového intervalu není správné řešení jednoznačně dané, proto jsem za správné odpovědi považovala i ty, které uváděly objem spočítaný za tři dny, pokud průtok uvažovaný v řešení odpovídal průběhu závislosti.

Poznámka 2: 98 % studentů, kteří tuto úlohu řešili správně, použilo tento postup řešení: Celkový objem vody počítá dle vzorce $V = Q \cdot t$, kde za Q dosazuje $300\ \mathrm{m^3 s^{-1}}$, za t dosazuje 3 dny převedené na sekundy.

[1] relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

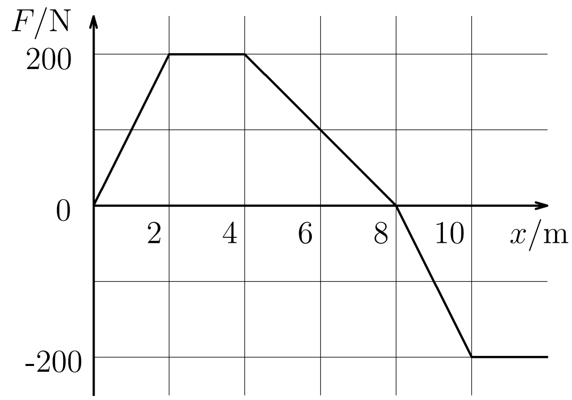
• | B2-2 | požadované dovednosti: I.a.1, I.b.1, I.c.1, I.e.1, I.c.4 |

Sousedka se na cestičce přetahuje se svým neposlušným psem Azorem. Proměnná síla ve směru cestičky $F(x)$ působící na Azora je zobrazena v grafu.

a) Jakou práci vykoná sousedka při působení na psa mezi 2. a 4. metrem?

b) Jakou práci vykoná při působení mezi počátkem a 8. metrem?

c) Jakou celkovou práci vykoná, než společně se psem urazí 10 metrů?



a)

kód	absolutní četnost α	β	γ	δ	π	λ	ϱ	absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
*	16	10	5	9	7	20	12	79	65,3 %	71,2 %
9	0	1	3	1	4	1	0	10	8,3 %	
11	2	3	1	0	1	1	2	10	8,3 %	9,0 %
2	2	0	1	0	0	01	0	4	3,3 %	3,6 %
3	3	0	0	0	1	0	0	4	3,3 %	3,6 %
99	2	0	5	3	1	3	0	14	11,6 %	12,6 %

Kódový klíč:
2–uvažuje $F = 0$ N
3–uvažuje $s = 0$ m
99–jiná odpověď

Vzorové řešení:
Práci, kterou vykoná sousedka, vypočítáme jako obsah plochy pod grafem: $W = F{\cdot}s$, kde $F = 200$ N a $s = (4 - 2)$ m. Po dosazení je tedy práce $W = 400$ J.

[1] relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

b)

kód	absolutní četnost α	β	γ	δ	π	λ	ϱ	absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
*	8	5	1	2	1	8	6	31	25,6 %	34,8 %
9	4	3	6	4	8	5	2	32	26,4 %	
11	0	2	0	0	0	0	2	4	3,3 %	4,5 %
2	2	2	1	0	2	3	0	10	8,3 %	11,2 %
3	4	0	1	1	1	4	2	13	10,7 %	14,6 %
4	4	0	1	1	0	0	0	6	5,0 %	6,7 %
99	3	2	4	4	2	8	2	25	20,7 %	28,1 %

Kódový klíč:
11–uvádí správnou numerickou hodnotu, ale s chybnými jednotkami
2–k výpočtu užívá vzorce $W = F \cdot s$, kde $F = 200$ N a $s = 8$ m
3–uvádí 0 J, neboť uvažuje $F = 0$ N
4–k výpočtu užívá vzorce $W = F \cdot s$, kde $F = 100$ N a $s = 8$ m
99–jiná odpověď

Vzorové řešení:
Práci, kterou vykoná sousedka, vypočítáme jako obsah plochy pod grafem: $W = \frac{F \cdot s_1}{2} + F \cdot s_2 + \frac{F \cdot s_3}{2}$, kde $F = 200$ N, $s_1 = 2$ m, $s_2 = (4-2)$ m a $s_3 = (8-4)$ m. Po dosazení je tedy práce $W = (200 + 400 + 400)$J $= 1000$ J.

c)

kód	absolutní četnost α	β	γ	δ	π	λ	ϱ	absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
*	6	3	0	1	8	6	2	26	21,5 %	29,9 %
9	5	3	7	5	4	6	4	34	28,1 %	
11	5	2	0	0	0	0	2	6	5,0 %	6,9 %
2	1	1	3	0	0	3	0	8	6,6 %	9,2 %
3	1	2	0	1	0	1	1	6	5,0 %	6,9 %
4	3	0	0	2	0	2	0	7	5,8 %	8,0 %
5	1	1	1	0	0	3	0	6	4,3 %	6,9 %
6	2	2	0	1	1	1	3	10	8,3 %	11,5 %
7	2	0	0	1	0	0	1	4	3,3 %	4,6 %
99	2	0	3	1	1	6	1	14	11,6 %	16,1 %

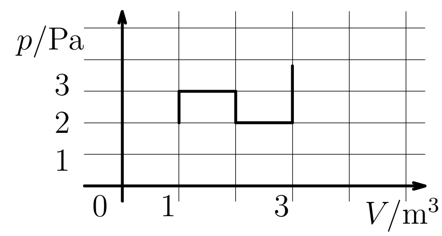
Kódový klíč:
11–uvádí správnou numerickou hodnotu, ale s chybnými jednotkami
2–k výpočtu užívá vzorce $W = F \cdot s$, kde $F = \pm 200$ N a $s = 10$ m
3–uvádí stejný výsledek jako v úloze b)
4–k výsledku, který uvádí v úloze b), přičítá -200 J
5–k výsledku, který uvádí v úloze b), přičítá -400 J
6–k výsledku, který uvádí v úloze b), přičítá $+200$ J
7–k výsledku, který uvádí v úloze b), přičítá $+400$ J
99–jiná odpověď

[1] relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

Vzorové řešení:
Práci, kterou vykoná sousedka, vypočítáme jako obsah plochy pod grafem. K výpočtu můžeme užít výsledek z předcházejícího příkladu b). $W = W_{\mathrm{b})} - \dfrac{F \cdot s}{2}$, kde $F =$ 200 N a $s = (10 - 8)$ m. Po dosazení je tedy práce $W = (1000 - 200)\mathrm{J} = 800$ J.

• B1-7	požadované dovednosti: I.a.1, I.b.1, I.c.1, I.e.1

Určete práci, kterou vykonal plyn, jehož p–V diagram je na obr.



	absolutní četnost							absolutní	relativní	relativní
kód	α	β	δ	π	λ	ϱ	φ	četnost	četnost	četnost[1]
*	9	7	0	0	4	0	0	20	18,0 %	37,7 %
9	5	11	11	15	2	7	7	58	52,3 %	
2	4	2	0	0	3	1	4	14	12,6 %	26,4 %
3	1	0	0	0	2	2	2	7	6,3 %	13,2 %
99	4	4	0	0	0	1	3	12	10,8 %	22,6 %

Kódový klíč:
2–k výpočtu používá vzorce $W = \Delta p \cdot \Delta V$ nebo $W = p \cdot \Delta V$, kde za p a V dosazuje různé krajní hodnoty
3–k výpočtu používá vzorce $W = \Delta(p \cdot V)$, kde za p a V dosazuje různé krajní hodnoty
99–jiná odpověď

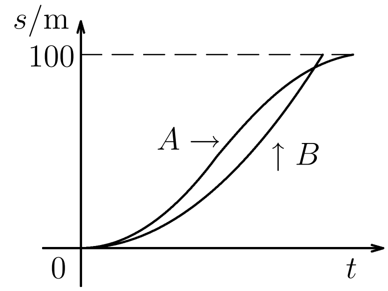
Vzorové řešení:
Práci, kterou plyn vykonal, vypočítáme jako obsah plochy pod grafem. Ploše 1 čtverečku odpovídá práce $W_0 = p \cdot V$, kde $p = 1$ Pa a $V = 1\ \mathrm{m}^3$, tedy
$W_0 = 1$ J. Plocha pod křivkou grafu odpovídá ploše 5 čtverečků. Celková práce $W = 5W_0 = 5$ J.

[1] relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

5.4.6 Tvar křivky

•	B2-3	požadované dovednosti: I.a.1, I.c.1, I.g.1, I.f.1

Na obr. je znázorněn graf závislosti dráhy dvou sprinterů (označených A a B) v běhu na 100 m na čase.
a) Který ze sprinterů závod vyhrál? Zdůvodněte!
b) Který ze sprinterů zpočátku více zrychloval? Stručně zdůvodněte!
c) Který, pokud některý, během závodu zpomalil? Případně vyznačte do grafu **v záznamovém archu**, v které části dráhy tento závodník zpomaloval.



a)

kód	absolutní četnost							absolutní četnost	relativní četnost
	α	β	γ	δ	π	λ	ϱ		
*	24	14	4	11	13	24	11	101	83,5 %
9	0	0	5	0	0	0	0	5	4,1 %
2	0	0	3	1	0	3	3	10	8,7 %
3	1	0	2	0	1	1	0	5	4,1 %

Kódový klíč:
2–uvádí B, ale chybné zdůvodnění
3–uvádí A

Ukázka některých špatných odpovědí:
A–v určitý čas má A větší dráhu než B
A–protože vykonával menší práci, jelikož dráha nebyla prudší než u B
A–měl kratší trať
A–narozdíl od B zrychlil
B–měl od setkání s A kratší trať
B–měl kratší trať, protože stoupá plynule

Vzorové řešení: B, neboť čas, za který uběhl 100 m, je menší než čas A po uběhnutí té samé dráhy.

b)

kód	absolutní četnost							absolutní četnost	relativní četnost
	α	β	γ	δ	π	λ	ϱ		
*	25	13	8	12	13	28	10	109	90,1 %
9	0	0	5	0	0	0	0	5	4,1 %
2	0	0	0	0	0	0	4	4	3,3 %
3	0	1	1	0	1	0	0	3	2,5 %

Kódový klíč:
2–uvádí A, ale bez zdůvodnění
3–uvádí B

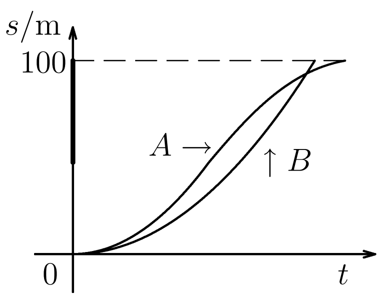
Vzorové řešení: A, protože jeho křivka je strmější nebo proto, že zpočátku uběhl za stejný větší dráhu než B.

c)

kód	absolutní četnost							absolutní četnost	relativní četnost
	α	β	γ	δ	π	λ	ϱ		
*	19	7	4	6	10	13	10	69	57,0 %
9	0	2	3	0	2	0	0	7	5,8 %
2	4	3	3	6	1	11	4	32	26,5 %
3	1	1	1	0	1	3	0	7	5,8 %
4	1	0	3	0	0	1	0	5	4,1 %
99	0	1	0	0	0	0	0	1	0,8 %

Kódový klíč:
2–uvádí A, ale pouze v koncové části křivky (přibližně od místa setkání s B)
3–uvádí A, ale ve střední části křivky
4–uvádí B
99–jiná odpověď

Vzorové řešení: A, vyznačeno v grafu.



5.4.7 Kvalitativní čtení grafu

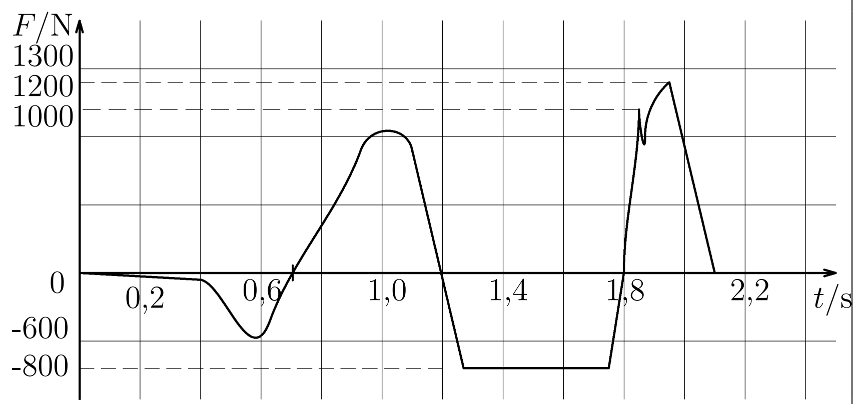
B1-2	požadované dovednosti: I.a.1, I.g.1, I.c.4

Byl proveden následující experiment. Na speciální elektronickou váhu, ukazující zatížení v N, si stoupl Neo. Při jeho klidném postoji jsme ukazatel zatížení nastavili na 0 N. Poté se Neo odrazil, vyskočil, ve vzduchu provedl bojový výkop a dopadl na to samé místo. Následující graf je záznamem síly, jež ukázala váha v závislosti na čase.

a) Které části grafu (**vyznačte v záznamovém archu**) odpovídají tomu, že Neo působil na váhu silou větší než je jeho tíha?

b) Určete (**vyznačte v záznamovém archu**), ve kterém časovém intervalu Neo nepůsobil na váhu?

c) Určete, jakou má Neo přibližně hmotnost. (Počítejte s tíhovým zrychlením $g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.)



a)

kód	absolutní četnost α	β	δ	π	λ	ϱ	φ	absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
*	20	16	9	10	11	7	12	85	76,6 %	84,2 %
9	1	1	1	5	0	1	1	10	9,0 %	
2	1	5	1	0	0	0	1	8	7,2 %	7,9 %
3	0	1	0	0	0	2	1	4	3,6 %	4,0 %
4	0	1	0	0	0	0	1	2	1,8 %	2,0 %
99	1	0	0	0	0	1	0	2	1,8 %	2,0 %

Kódový klíč:
2–uvádí nejvyšší hrot, tedy přibližně okolo 2 s
3–uvádí časové intervaly, v kterých je křivka grafu v oblasti záporných hodnot F
4–uvádí 2 hroty, jeden přibližně okolo 2 s, druhý přibližně okolo 1 s
99–jiná odpověď

Vzorové řešení: Neo působil na váhu silou větší než je jeho tíha v těch časových intervalech, v nichž je funkce kladná, tj. v $(0,7\mathrm{s}; 1,2\mathrm{s}) \cup (1,8\mathrm{s}; 2,1\mathrm{s})$.

[1] relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

b)

kód	absolutní četnost α	β	δ	π	λ	ϱ	φ	absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
*	15	6	3	3	5	6	6	44	39,6 %	43,6 %
9	0	2	1	6	0	1	0	10	9,0 %	
2	3	9	6	5	3	2	8	36	32,4 %	35,6 %
3	2	4	1	0	0	0	0	7	6,3 %	6,9 %
99	3	3	0	1	3	2	2	14	12,6 %	13,9 %

Kódový klíč:
2–uvádí intervaly, kdy je funkce záporná, konkrétně $(0\mathrm{s}; 0,7\mathrm{s}) \cup (1,2\mathrm{s}; 1,8\mathrm{s})$.
3–uvádí interval (1,2 s; 1,8 s)
99–jiná odpověď

Vzorové řešení: Neo nepůsobil na váhu časovém intervalu $(1,25\mathrm{s}; 1,75\mathrm{s})$.

c)

kód	absolutní četnost α	β	δ	π	λ	ϱ	φ	absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
*	16	13	1	7	6	7	9	59	53,2 %	73,8 %
9	1	7	5	7	4	3	4	31	27,9 %	
2	2	2	2	0	1	1	0	8	7,2 %	10,0 %
3	0	1	1	0	0	0	1	3	2,7 %	3,8 %
99	4	1	2	1	0	1	1	10	9,0 %	12,5 %

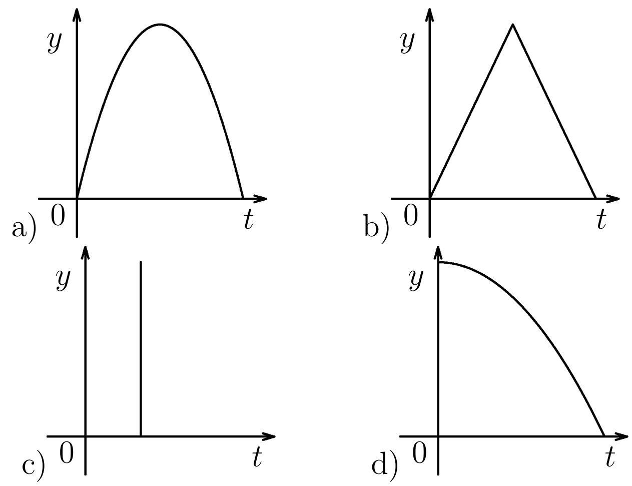
Kódový klíč:
2–uvádí hmotnost 100 kg
3–uvádí hmotnost 60 kg

Vzorové řešení: Z grafu vyčteme, jakou hodnotu ukazovala váha, jestliže na ni Neo nepůsobil, a odtud s použitím vztahu $F = mg$ dostaneme požadovanou hmotnost. Konkrétně: $F = 800\ \mathrm{N}$, $m = \frac{F}{g} = \frac{800\ \mathrm{N}}{10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}} = 80\ \mathrm{kg}$.

[1] relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

• A1-5	požadované dovednosti: I.a.1, I.g.1

Který graf - závislost y-ové souřadnice na čase - z vpravo uvedených možností charakterizuje I. vrh míče svisle vzhůru (vyberte jednu z nabízených možností)
II. vodorovný vrh míče z rozhledny (vyberte jednu z nabízených možností)
III. vrh míče šikmo vzhůru (vyberte jednu z nabízených možností)
Pozn.: y-ová souřadnice míří svisle vzhůru.



I.

kód	absolutní četnost α	β	γ	δ	π	ε	ϱ	absolutní četnost	relativní četnost
a*	12	13	0	5	7	2	3	42	31,8 %
b	7	2	5	1	2	1	10	28	21,2 %
c	8	11	7	9	13	13	1	62	47,0 %
d	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0 %
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0 %

II.

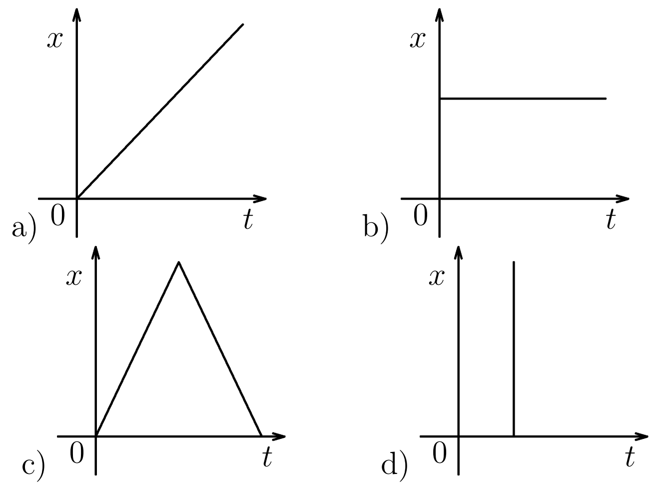
kód	absolutní četnost α	β	γ	δ	π	ε	ϱ	absolutní četnost	relativní četnost
a	0	24	1	0	0	0	0	25	18,9 %
b	4	1	1	0	1	2	0	9	6,8 %
c	0	1	0	3	0	0	0	4	3,0 %
d*	23	0	10	11	21	14	14	93	70,4 %
9	0	0	0	1	0	0	0	1	0,8 %

III.

kód	absolutní četnost α	β	γ	δ	π	ε	ϱ	absolutní četnost	relativní četnost
a*	25	22	12	11	17	15	12	114	86,4 %
b	2	3	0	2	3	1	2	13	9,9 %
c	0	0	0	2	2	0	0	4	3,0 %
d	0	1	0	0	0	0	0	1	0,8 %
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0 %

• B1-4 | požadované dovednosti: I.a.1, I.g.1

Který graf - závislost x-ové souřadnice na čase - z vpravo uvedených možností charakterizuje
I. vrh míče svisle vzhůru (Vyberte jednu z nabízených možností)
II. vodorovný vrh míče z rozhledny (Vyberte jednu z nabízených možností)
III. vrh míče šikmo vzhůru (Vyberte jednu z nabízených možností)
Pozn.: x-ová souřadnice míří vodorovně.



I.

kód	absolutní četnost α	β	δ	π	λ	ϱ	φ	absolutní četnost	relativní četnost
a	1	4	2	1	2	0	5	15	13,5 %
b*	16	5	1	4	8	7	2	43	38,7 %
c	0	6	2	4	0	3	5	20	18,0 %
d	6	8	6	3	1	1	4	29	26,1 %
9	0	1	0	3	0	0	0	4	3,6 %

II.

kód	absolutní četnost α	β	δ	π	λ	ϱ	φ	absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
a*	14	9	2	2	5	8	4	44	39,6 %	43,6 %
b	5	10	8	6	2	2	11	44	39,6 %	43,6 %
c	1	0	0	3	1	0		5	4,5 %	5,0 %
d	3	3	0	0	1	0	1	8	7,2 %	7,9 %
9	0	2	1	4	2	1	0	10	9,0 %	

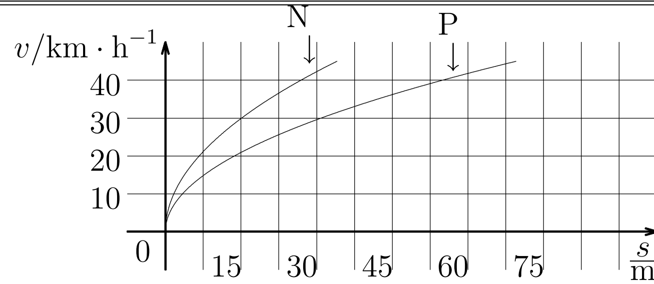
III.

kód	absolutní četnost α	β	δ	π	λ	ϱ	φ	absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
a*	14	11	5	7	4	8	6	55	50,0 %	50,0 %
b	1	2	0	0	0	0	1	4	3,6 %	4,0 %
c	8	6	5	3	6	1	6	35	31,5 %	35,0 %
d	0	1	1	1	0	1	2	6	5,4 %	6,0 %
9	0	4	0	4	1	1		11	9,9 %	

[1]relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

B1-3	požadované dovednosti: I.a.1, I.c.1, I.g.1

Na obr. vpravo je charakteristika průběhu brzdné dráhy tramvajového vozu. Určete, o kolik metrů blíže zastaví tramvaj jedoucí rychlostí 30 km/h při použití nouzové brzdy (N) oproti použití provozní brzdy (P).



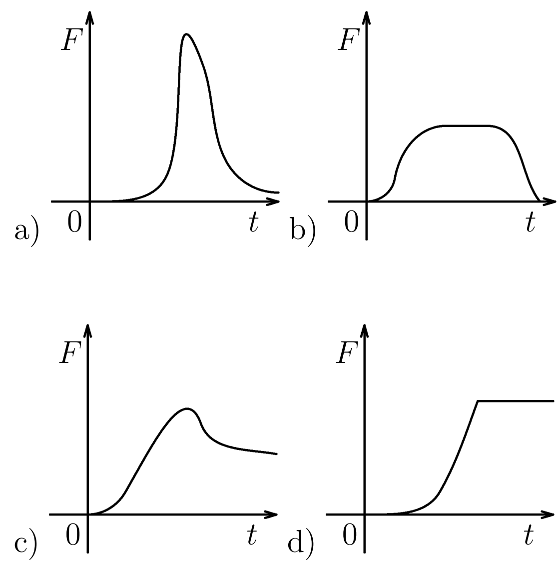
kód	absolutní četnost							absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
	α	β	δ	π	λ	ϱ	φ			
*	21	19	5	5	6	11	12	79	71,7 %	84,0 %
9	1	1	4	7	2	0	2	17	15,3 %	
2	0	3	3	1	0	0	1	8	7,2 %	8,5 %
3	1	1	1	0	1	0	0	4	3,6 %	4,3 %
4	0	0	0	0	2	0	1	3	2,7 %	3,2 %

Kódový klíč:
2–pravděpodobně odečten rozdíl na koncích závislostí
3–hrubé nepochopení grafu, převážně se snaží ve výpočtech uplatnit veličinu čas
4–pouze odečtení hodnoty pro danou rychlost 30 km/h

Vzorové řešení: Z grafu odečteme, že brzdná dráha odpovídající rychlosti 30 km/h je při použití nouzové brzdy 15 m, při použití provozní brzdy 30 m. Zabrzdí-li tedy tramvaj nouzovou brzdou, zastaví o 15 m blíže.

• | A2-2 | požadované dovednosti: I.a.1, I.d.1, I.g.1 |
|---|---|

Přiřaďte k jednotlivým úderům graf $F(t)$, který daný úder nejlépe charakterizuje. Měřítka jsou u všech grafů stejná. F je velikost síly působící na podlahu a t čas.



1) úder měkkého míče při odrazu od podlahy
2) rána při dopadu pytlíku cukru na podlahu
3) sečná rána sekerou

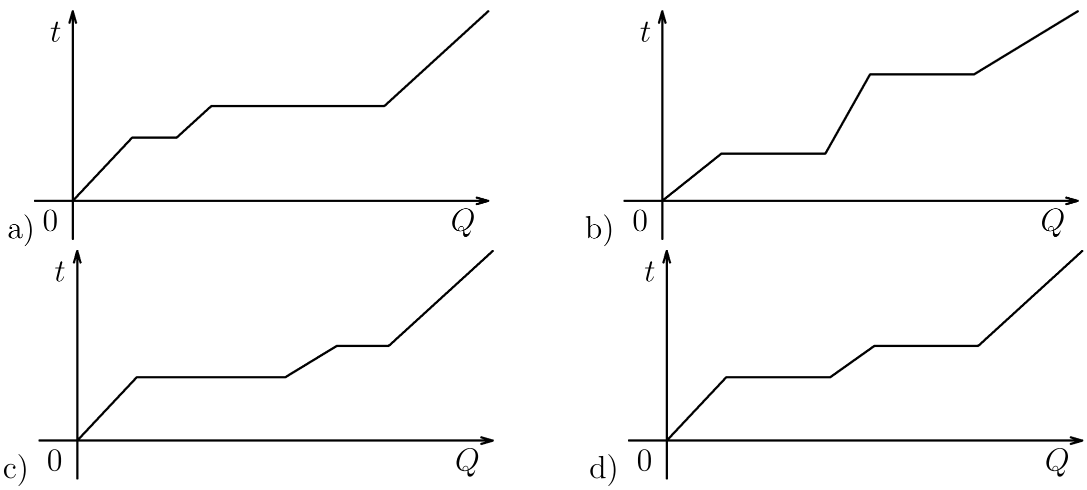
	kód	absolutní četnost								absolutní četnost	relativní četnost
		α	β	δ	π	ε	λ	φ	ϱ		
	a	5	6	8	8	9	4	6	7	53	40,0 %
1)	b*	19	4	7	8	2	4	6	2	52	39,1 %
	c	4	4	1	5	2	5	3	3	27	20,3 %
	d	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0 %
	9	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0,8 %

	kód	absolutní četnost								absolutní četnost	relativní četnost
		α	β	δ	π	ε	λ	φ	ϱ		
	a	4	4	1	0	2	0	0	1	12	9,0 %
2)	b	1	6	4	3	3	2	6	4	29	21,8 %
	c*	10	3	2	5	1	4	3	1	29	21,8 %
	d	13	1	9	13	7	7	6	6	62	46,6 %
	9	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0,8 %

	kód	absolutní četnost								absolutní četnost	relativní četnost
		α	β	δ	π	ε	λ	φ	ϱ		
	a*	17	5	6	12	1	8	8	1	58	43,6 %
3)	b	1	1	0	1	1	1	1	4	10	7,5 %
	c	5	0	6	3	2	2	1	2	21	15,8 %
	d	5	8	4	5	8	2	5	5	42	31,6 %
	9	0	0	0	0	2	0	0	0	2	1,5 %

A2-6	požadované dovednosti: I.a.1, I.d.1, I.g.1

V jedné jeskyni byla objevena nádoba s neznámou tuhou látkou. Tato látka byla podrobena různému vědeckému zkoumání. Zjistilo se např., že k tomu, aby se daná látka změnila v kapalinu, je třeba jí dodat mnohem větší teplo, než dodáme této kapalině, aby se změnila v páru. Na základě které naměřené závislosti mohli vědci toto prohlásit? (V grafu je vynesena závislost teploty t na dodaném teple Q .)



kód	absolutní četnost								absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
	α	β	δ	π	ε	λ	φ	ϱ			
a	3	2	4	2	0	0	1	4	16	12,0 %	13,7 %
b	6	7	5	3	2	2	9	2	36	27,0 %	30,8 %
c*	17	4	2	15	1	10	4	6	59	44,4 %	50,4 %
d	1	0	2	0	3	0	0	0	6	4,5 %	5,1 %
9	1	1	3	1	8	1	1	0	16	12,0 %	

5.4.8 Porovnání dovedností I.g.1 a I.d.1

A2-1	požadované dovednosti: I.a.1, I.g.1

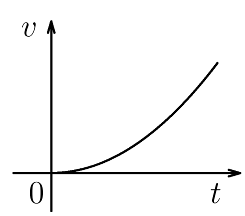
Který přímočarý pohyb je popsán vpravo uvedeným grafem (v je velikost rychlosti a t čas)? Znázorněná křivka je parabola.

a)rovnoměrný

b)rovnoměrně zrychlený

c)nerovnoměrně zrychlený

d)žádný z uvedených

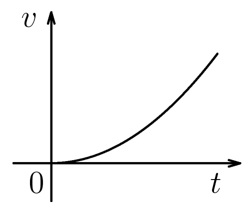


[1]relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

kód	absolutní četnost α	β	δ	π	ε	λ	φ	ϱ	absolutní četnost	relativní četnost
a	0	0	0	0	1	1	1	0	3	2,3 %
b	8	6	15	14	9	9	4	5	70	52,6 %
c*	20	6	1	7	2	3	9	6	54	40,6 %
d	0	2	0	0	1	0	1	1	5	3,8 %
9	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0,8 %

B1-1	požadované dovednosti: I.a.1, I.d.1

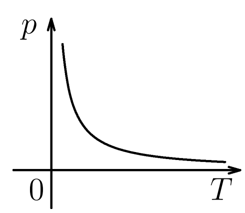
Který přímočarý pohyb je popsán vpravo uvedeným grafem (v je velikost rychlosti a t čas)? Znázorněná křivka je parabola.
a)rovnoměrný (tj. v =konst.)
b)rovnoměrně zrychlený (tj. $v = \text{konst} \cdot t$)
c)nerovnoměrně zrychlený
d)žádný z uvedených



kód	absolutní četnost α	β	δ	π	λ	ϱ	φ	absolutní četnost	relativní četnost
a	0	1	0	0	0	0	0	1	0,9 %
b	4	11	4	8	5	6	8	46	41,4 %
c*	19	11	7	5	4	5	7	58	52,3 %
d	0	0	0	2	1	2	0	4	3,6 %
9	0	0	0	2	0	0	0	2	1,8 %

A1-1	požadované dovednosti: I.a.1, I.d.1

Na obr. je znázorněn děj s ideálním plynem stálé hmotnosti. Křivka je hyperbola; p tlak plynu a T jeho teplota. O jaký děj se jedná?
a)izobarický (tj. p=konst.)
b)izochorický (tj. p/T=konst.)
c)izotermický (tj. T=konst.)
d)žádný z výše uvedených



	absolutní četnost							absolutní	relativní	relativní
kód	α	β	γ	δ	π	ε	φ	četnost	četnost	četnost[1]
a	0	0	0	3	2	0	1	6	4,5 %	4,9 %
b	19	10	0	6	11	5	7	58	43,9 %	47,5 %
c	0	2	4	1	0	3	0	10	7,6 %	8,2 %
d*	8	14	0	4	9	7	6	48	36,4 %	39,3 %
9	0	0	8	1	0	1	0	10	7,6 %	

5.4.9 Sestrojení grafu

- | B2-5 | požadované dovednosti: II.a.1, II.c.1, II.c.2, II.d.1, II.d.2 |

V tabulce je uvedena závislost hustoty na teplotě pro vodu. Vyneste tuto závislost do grafu.

t /°C	ϱ /g.cm^{-3}
0	0,999 84
1	0,999 90
2	0,999 95
4	0,999 98
6	0,999 94
8	0,999 84
10	0,999 70
12	0,999 50
14	0,999 26

	absolutní četnost							absolutní	relativní
kód	α	β	γ	δ	π	λ	ϱ	četnost	četnost
*	7	2	0	0	3	14	5	31	25,6 %
9	4	1	10	9	7	3	3	37	30,6 %

Výše uvedená tabulka obsahuje pouze četnosti správných a vynechaných odpovědí. Jednotlivé chyby popisuje tabulka na následující straně.

[1] relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

Vzhledem k tomu, že tento příklad vyžaduje poměrně široké spektrum dovedností k jeho vyřešení, provádím analýzu odlišně než v předchozích příkladech. U každé chyby uvádím, kolik procent studentů, kteří řešili tento příklad, se jí dopustilo. Jelikož se některý student mohl dopustit více chyb, není celkový součet procent roven stu.

	absolutní četnost							absolutní	
počet studentů,	α	β	γ	δ	π	λ	ϱ	četnost	
jež řešili	21	13	4	3	7	25	11	84	relativní
kód	α	β	γ	δ	π	λ	ϱ	četnost	četnost
2	5	3	2	0	0	1	3	13	15,5 %
3	1	0	2	1	1	0	0	5	6,0 %
4	2	2	0	0	0	0	0	4	4,8 %
5	2	0	2	1	1	0	0	6	7,1 %
6	0	2	1	0	0	0	3	6	7,1 %
7	3	1	2	0	0	5	2	13	15,5 %
8	2	4	1	0	1	1	1	10	11,9 %

Kódový klíč:
2–v grafu je vynesena závislost $t(\varrho)$
3–špatně volené měřítko na ose ϱ, mezi jednotlivými hodnotami hustoty uvedenými v tabulce je stále stejná vzdálenost
4–špatně volené měřítko na ose ϱ, hodnota hustoty pro 8°C $0,99984$ g.cm^{-3} leží přesně uprostřed mezi okolními hodnotami uvednými v tabulce
5–na milimetrovém papíře jsou vyneseny pouze osy a stanoveno měřítko pro teplotní osu
6–špatně volené měřítko na ose ϱ, velmi málo citlivé
7–chybí popisy na osách, zvláště pak jednotek
8–body vynesené do grafu jsou spojeny lomenou čarou

5.4.10 Kvalitativní náčrt grafu

A1-2	požadované dovednosti: I.a.1, I.d.1

Známý výrostek Hugo vyjel z domu tropit lumpárnu tentokrát na kole. Na přehledné rovné silnici rovnoměrně zrychloval. Najednou míjí hospodu a vzpomene si, že si doma zapomněl láhev s pitím ostřejšího kalibru. Prudce zabrzdí, otočí kolo a jak přijel, stejně se vrací domů, tady už však brzdí mnohem mírněji. Jde domů pro tekutinu, nasedá na kolo a jede zase vpřed po té samé trase.
a) Načrtněte graf závislosti souřadnice Hugova kola na čase.
b) Načrtněte graf závislosti dráhy, kterou ujelo Hugovo kolo, na čase.

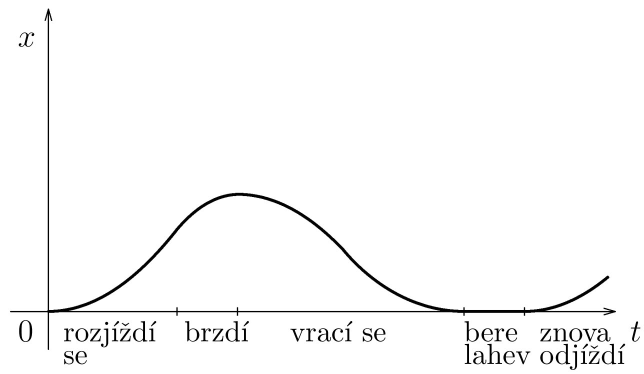
a)

kód	absolutní četnost							absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
	α	β	γ	δ	π	ε	ϱ			
*	11	0	0	0	1	0	1	13	10,0 %	11,9 %
9	2	5	2	6	5	0	3	23	17,4 %	
2	6	5	5	2	7	6	7	38	28,8 %	34,9 %
3	0	3	0	2	0	0	1	6	4,5 %	5,5 %
4	1	1	0	0	2	6	1	11	8,3 %	10,1 %
5	5	5	0	1	4	0	1	16	12,1 %	14,7 %
6	0	3	2	1	0	1	0	7	5,3 %	6,4 %
7	0	0	0	0	1	0	0	1	0,8 %	0,9 %
99	2	4	3	3	2	3	0	17	12,9 %	15,6 %

Kódový klíč:
2–pohyb Huga zakreslen pouze pomocí lineárních závislostí, není zachycen zrychlený ani zpomalený pohyb, ale jinak správné užití rostoucí, klesající, příp. konstantní funkce; Hugovo brzdění bylo vyjádřeno rostoucí lineární funkcí se sklonem mnohem menším než v předchozím úseku
3–chybí zakreslení zpomaleného pohybu a Hugovo brzdění je vyjádřeno lineární funkcí s malou směrnicí
4–podobné řešení jako v odpovědi 2, avšak není zakresleno, že Hugo brzdí, polovinu tohoto intervalu pokračuje rovnoměrným pohybem od domova, pak je zakreslen ostrý zlom, a dále se rovnoměrným pohybem vrací
5–podobné řešení jako v odpovědi 2, ale Hugovo brzdění je vyjádřeno klesající lineární funkcí (až k časové ose) a dále křivka závislosti nad časovým intervalem, kdy se Hugo vrací, vytváří stříšku
6–podobné řešení jako v odpovědi 2, ale Hugovo bržděni je v daném intervalu vyjádřeno funkcí $x = 0$, stejně jako v předchozím případě křivka závislosti nad časovým intervalem, kdy se Hugo vrací, vytváří stříšku
7–je zaměněna souřadnice a dráha či neuvádí rozdíl mezi souřadnicí a dráhou
99–jiná odpověď

[1]relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

Vzorové řešení:
Uvádí následující graf:



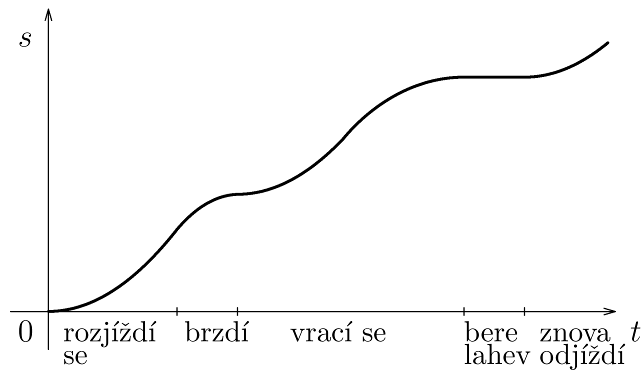
b)

kód	absolutní četnost α	β	γ	δ	π	ε	ϱ	absolutní četnost	relativní četnost	relativní četnost[1]
*	11	0	0	0	3	0	1	15	11,4 %	13,0 %
9	0	2	2	3	7	1	2	17	12,9 %	
2	6	12	2	5	8	7	3	43	32,6 %	37,4 %
3	3	5	1	1	0	0	2	12	9,1 %	10,4 %
4	4	0	2	1	0	5	0	12	9,1 %	10,4 %
5	0	3	1	3	1	0	2	10	7,6 %	8,7 %
99	3	4	4	2	3	3	4	23	17,4 %	20,0 %

Kódový klíč:
2–pohyb Huga zakreslen pouze pomocí lineárních závislostí, není zachycen zrychlený ani zpomalený pohyb, ale jinak správné užití rostoucí, klesající, příp. konstantní funkce; Hugovo brzdění bylo vyjádřeno rostoucí lineární funkcí se sklonem mnohem menším než v předchozím úseku
3–chybí zakreslení zpomaleného pohybu a Hugovo brzdění je vyjádřeno také lineární funkcí se směrnicí blížící se nule
4–podobné řešení jako v odpovědi 2, ale Hugovo brzdění je vyjádřeno klesající lineární funkcí (až k časové ose) a dále křivka závislosti nad časovým intervalem, kdy se Hugo vrací, vytváří stříšku
7–je zaměněna souřadnice a dráha, či neuvádí rozdíl mezi souřadnicí a dráhou
99–jiná odpověď

[1] relativní četnost, kde 100 %, je počet studentů, kteří odpověděli

Vzorové řešení:
Uvádí následující graf:



Kapitola 6

Výsledky vlastního výzkumu

V této kapitole je uvedena interpretace dat, která byla získána analýzou úloh popsanou v předchozí kapitole. Zaměřuji se zde především na zobecnění nejčetnějších konkrétních chyb. Jejich výčet lze snadno nalézt ve výše uvedených tabulkách analýz úloh.

Při zobecnění chyb vycházím z vymezení rozsahu dovedností v Kapitole 3. Jak je uvedeno v předchozí kapitole, jsou ke každé úloze stanoveny dovednosti potřebné k jejímu vyřešení. K dané chybě je pak možné přiřadit dovednost, kterou student, jenž tuto chybu udělal, neovládá. Pro větší přehlednost jsou zjištěné chyby shrnuty do bloků odpovídajících kategoriím vymezených dovedeností. (Pod nadpisy těchto bloků uvádím příslušnou dovednost).

Studenti vcelku nemají problémy s určením měřítek na osách

I.b.1 interpretovat velikosti veličin na osách

Úloha B1-5 a) (s. 27), jež byla zaměřena pouze na zjištění, jak si studenti všímají měřítek, dopadla poměrně dobře – pouze 16 % odpovědí bylo chybných. Ovšem v položce B2-1 (s. 36) třetina studentů odečetla časový údaj bez započítání řádu 10^6. Lze se tedy domnívat, že část studentů se zabývá měřítky na osách, až když jsou k tomu zadáním úlohy navedeni.

Úlohy B1-5 b) a c) měly o 8-11 % nižší úspěšnost než úloha a). Toto procento studentů zřejmě mělo problémy ne se zjištěním měřítka, ale s jeho aplikací. Předpokládám, že studenti hodnoty, jež potřebovali zjistit, neodečítali přesně, pouze odhadovali. A některým tento odhad činil potíže.

Studenti nerozlišují mezi souřadnicí a velikostí vektorové veličiny

I.d.3 určit, v kterých intervalech roste, klesá nebo je konstantní velikost vektorové veličiny, pokud je y souřadnicí této vektorové veličiny

Tuto dovednost předchozí studie vůbec nezkoumají. V úloze A2-5 (s. 28) se ukázalo, že studenti mají velké problémy při interpretaci grafu, pokud musí použít tuto dovednost. Určit, v kterých intervalech byla velikost rychlosti konstantní, nedělalo žákům potíže (úspěšnost 91 %). Ovšem určit intervaly, na kterých klesala či stoupala, už bylo pro žáky mnohem těžší (úspěšnost pouze mezi 11-14 %). Nejčetnější odpovědi uvádějí intervaly, na kterých klesala či stoupala funkce grafu, tj. souřadnice rychlosti. Domnívám se, že takto nízká úspěšnost je způsobena především tím, že s takovouto úlohou se studenti středních škol příliš nesetkávají (viz podkapitola 2.2).

Studenti neznají význam směrnice grafu v daném bodě

I.d.6 určit průměrnou rychlost změny veličiny y v závislosti na x
I.d.7 určit okamžitou rychlost změny veličiny y v závislosti na x

Konkrétní zjištění průměrné či okamžité rychlosti z grafu $s(t)$ prováděli studenti především v úlohách A2-3 a B1-6 (s. 37, 39). Pravděpodobně kvůli tomu, že se jednalo o otevřené úlohy, neřešilo je 10-20 % studentů. Dále uváděné relativní četnosti se vztahují ke studentům, kteří danou úlohu řešili.

Nejvyšší úspěšnost (84 %) měla úloha na určení směrnice lineární funkce procházející počátkem. Podobný výsledek uvádějí i dřívější studie. Dále dopadly nejúspěšněji (80 %) úlohy na určení směrnice nelineární závislosti, konkrétně zrychleného pohybu (A2-3 d, B1-6 d; s. 37, 39). V předchozích studiích se uvádí, že tato úloha působila žákům největší potíže. Srovnání těchto výsledků komentuji na konci tohoto odstavce. Také úloha určit směrnici lineární funkce neprocházející počátkem (B1-6 b, s. 39) má stále relativně vysokou úspěšnost – 75 % narozdíl od údajů, jež uvádějí dřívější studie. Ovšem podstatně nižší úspěšnost byla v případě, kdy měli ti samí studenti určit velikost okamžité rychlosti v daném čase téhož pohybu jako v předcházející úloze. Pouze 43 % žáků odpovědělo správně, přičemž nejčetnější nesprávnou odpovědí bylo užití vzorce $v = \frac{s}{t}$, kde t je daný časový okamžik a s příslušná dráha. Přitom z interpretace této části grafu vyplývá, že se jednalo o pohyb s konstantní rychlostí a tedy průměrná rychlost na daném intervalu a okamžitá rychlost v libovolném čase z tohoto intervalu musí být stejné.

Dále měli studenti zjistit průměrnou rychlost z konstantní části závislosti $s(t)$ (A2-3 b, s. 37). Přes očekávání, že se jedná o velmi lehkou úlohu, odpověděla správně pouze polovina řešících studentů. Chybnými postupy řešení bylo užití vzorce $v = \frac{s}{t}$, či dokonce $v = \frac{s}{\Delta t}$.

Dalším úkolem studentů bylo určit průměrnou rychlost, jestliže křivkou grafu byla lomená čára. Pokud lomená čára začínala v bodě o souřadnicích (0,0), úspěšnost úlohy se pohybovala okolo 60 %, pokud ne, byla úspěšnost nižší – 40 %. Požadovanou průměrnou rychlost počítali studenti nejčastěji nesprávně tak, že určili průměrnou rychlost v každém úseku lomené čáry a dále tyto získané rychlosti zprůměrovali. *Při určení rychlosti umí studenti většinou užít pouze vzoreček* $s = v \cdot t$.

Z výše uvedeného rozboru úloh, dle mého názoru, vyplývá, že úspěšnost vyřešení dané úlohy závisí na tom, jak je úloha zadána. Domnívám se, že na obtížnost úlohy nemá vliv ani tak to, zda je závislost grafu lineární nebo nelineární (jak je zmiňováno v předchozích studiích), ale především to, zda závislost prochází počátkem soustavy souřadné a zda daný časový interval začíná v čase $t = 0$. Případně, jak uvádím dále, zda jsou na křivce výrazné body – lomy. Vzhledem k tomu, že články [6] a [5] obsahují v příloze i zadávaný test včetně relativních četností odpovědí u jednotlivých otázek, je možné zjistit, že ve všech grafech (v úlohách zaměřených na zjišťování rychlosti) zobrazujích nelineární závislost tato závislost neprochází počátkem. Na tuto domněnku ukazuje totiž nejčastější, již zmiňovaná, chyba studentů. Někteří žáci si totiž zřejmě nejsou vědomi toho, že mají spočítat směrnici, ale dokáží použít vzoreček $v = \frac{s}{t}$. Někteří dokonce znají i vzoreček $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, ale dovedou ho aplikovat pouze pokud je k tomu vybízí křivka grafu. Tedy pokud je čára grafu ve vhodných intervalech lomená. Viz například již uvedené určení průměrné rychlosti z grafu konstantní závislosti $s(t)$, kde část studentů použila vzorec $v = \frac{s}{\Delta t}$, neboť Δt bylo, narozdíl od konstantní dráhy, zřetelně vymezeno lomenou čarou v grafu.

Předchozí studie uvádí, že někteří studenti při určování rychlosti z grafu $s(t)$ pouze odečetli výšku grafu pro daný čas. Ve výše popsaných příkladech se tato chyba nijak výrazně neprojevila — nejvíce v úloze B1-6 c (s. 39) (zjištění okamžité rychlosti) u 8 % žáků. Tato chyba může svědčit o záměně grafu $s(t)$ za graf $v(t)$. Vzhledem k tomu, že žádný ze studentů, jenž udělal tuto chybu, neuvedl u numerického výsledku jednotku, domnívám se, že spíše nevěděl, jak má rychlost spočítat. U dosavadních studií se tato chyba projevila především tam, kde v daném časovém intervalu nevykazovala závislost zřetelné lomy, často také při určení okamžité rychlosti.

Příklady s nefyzikální tématikou ukazují na jiné chyby. V úloze A1-9 (s. 42) byly po studentech vyžadovány stejné dovednosti (pro určení rychlosti změny), ale pro závislost jiných veličin, konkrétně vykácené plochy na čase. Křivkou grafu byla lomená čára, ale narozdíl od předchozích případů jsou zde nejčetnější chyby zcela jiné. Nejčastěji studenti chybně uváděli výpočet aritmetického průměru z hodnot příslušejících krajním hodnotám časového intervalu, případně pouze velikosti těchto ploch od sebe odečetli. Zřejmě většina ze studentů, kteří odpověděli nesprávně, nevěděla, že mají počítat rychlost časové změny dané veličiny, tj. vykácené plochy deštných pralesů.

Úloha B2-7 (s. 44) podobně jako předchozí příklad ukazuje, jak umí studenti aplikovat to, co se naučili v matematice a ve fyzice. Křivka grafu závislosti počtu obyvatel na čase byla nelineární a daný časový interval, v kterém studenti počítali průměrný přírůstek, nezačínal v roce 0. Přesto v tomto příkladě uvádělo správný postup více studentů než v předchozí úloze. Zde dělalo žákům menší potíže uvědomit si, že počítají rychlost změny veličiny. Ovšem v porovnání s fyzikálními příklady A2-3 d a B1-6 d – určení směrnice nelineární závislosti v grafu $s(t)$ – je úspěšnost této úlohy menší. Nejčetnější chybou řešení (9 %) bylo odečtení počtu obyvatel na konci 20. století od počtu obyvatel na počátku téhož století.

Někteří studenti zaměňují graf závislosti dráhy na čase za závislost rychlosti na čase, někteří studenti vnímají graf závislosti dráhy na čase jako obrázek

I.d.4 rychlosti změny veličiny y přiřadit fyzikální význam
I.d.5.kvalitativně porovnat, jak rychle roste nebo klesá závislost y na x
v jednotlivých částech křivky grafu

Co se týče kvalitativního určení rychlosti změny veličiny, byla tato dovednost zkoumána především na grafech závislosti dráhy či souřadnice na čase. U nejjednodušší závislosti jako v příkladě A1-7 (s. 30) je úspěšnost řešení poměrně vysoká: 80 % . Nejčetnější chyba v úloze A1-7 ukazuje na již výše uvedenou chybu, a sice tu, že někteří studenti vnímají graf jako obrázek. Tuto domněnku potvrzuje také úloha A1-8 (s. 36), zde vybralo mnohem větší procento studentů (40 %) nesprávnou odpověď, nejspíš proto, že se jedná o netypickou závislost. Úloha B2-6 (s. 30), přestože byla dle mého názoru jednoduchá, dopadla poměrně špatně. V první části úlohy se úspěšnost pohybovala mezi 8-13 % . Přičemž 60-65 % studentů uvedlo odpověď, která by svědčila o záměně grafu závislosti souřadnice na čase za graf závislosti velikosti rychlosti na čase. Ovšem v druhé části úlohy odpověď, svědčící o této záměně, uvádí už pouze 35 % dotázaných. Až čtvrtina studentů zřejmě považovala graf za obrázek. Záměnu grafu závislosti souřadnice na čase za velikost rychlosti učinilo téměř 20 % studentů také v úloze A2-7 (s. 35).

I v úloze A1-6 (s. 32), se projevuje vnímání grafu jako obrázku, ale mnohem výrazněji než v předešlém příkladě. Úloha A1-4 byla zaměřena na zjištění, jak studenti umí kvalitativně porovnat rychlost časové změny jiné veličiny než dráhy. Křivka v grafu v úloze A1-4 byla v podstatě stejná jako u úlohy A1-6, jen se tedy jednalo o závislost jiných veličin (magnetického indukčního toku na čase) a zjišťovanou rychlostí změny bylo indukované napětí. Přestože studenti měli k dispozici nápovědu a zadávající učitelé byli upozorněni, že takto zadanou úlohu by měli umět řešit i žáci 1. a 2. ročníku, tuto úlohu neřešila čtvrtina dotázaných, což bylo o 15 % více než v úloze A1-6. Zřejmě byla pro žáky poměrně dost obtížná, výsledky ukazují, že nejtěžší pro studenty bylo si uvědomit, že pokud magnetický indukční tok klesá, hodnota indukovaného napětí roste. Pomineme-li však tuto chybu, zvolilo vcelku rozumnou závislost (v intervalech $(0, t_1)$ a (t_2, t_3) nulovou, v ostatních konstantní) 55 % studentů. Vzhledem k tomu, že zde žádná alternativa nijak výrazně nepřipomínala tvar křivky v zadaném grafu, domnívám se, že studenti byli nuceni nad danou situací přemýšlet více než v úloze A1-6. Některé studenty asi nutnost více se zamyslet nad daným úkolem od jeho řešení zcela odradila, což může být také možným důvodem většího počtu neřešících studentů.

Úlohy ze života byly zaměřeny spíše na dovednost I.d.8, tedy studenti neměli porovnat rychlost změny dané veličiny v jednotlivých intervalech křivky grafu, ale porovnat mezi sebou více závislostí vynesených do téhož grafu. Úspěšnost byla u obou úloh (A2-8 a B1-8; s. 33, 34) poměrně vysoká: $70 - 80$ %. Nejčetnější nesprávná odpověď v úloze A2-8 (16 %) by popírala výše uvedenou chybu, že někteří studenti vnímají graf jako obrázek. Jedná se o dvě rostoucí závislosti (ozn. M a Ž). Na daném intervalu rostou stejně rychle, liší se o absolutní člen. Závislost Ž „leží” nad závislostí M. Dle nejčastěji voleného distraktoru studenti uvažovali, že závislost Ž roste pomaleji než závislost M. Podle mého názoru je však chyba v úloze způsobena nepřesným odečítáním z grafu, zejména zvolením špatného časového intervalu.

Studenti neznají význam plochy pod grafem

I.e.1 interpretovat velikost plochy pod grafem $y = f(x)$ jako velikost veličiny o rozměrech $[x] \cdot [y]$ a v případě, kdy je takto vymezená plocha jednoduchým geometrickým útvarem, určit velikost obsahu této plochy

Jak žáci ovládají tuto dovednost jsem zjišťovala především na typických příkladech – ze závislosti rychlosti na čase mají studenti určit ujetou dráhu – úlohy A1-3 (s. 45) a B2-4 (s. 46). Nejúspěšněji (80 %) dopadla úloha, kdy se měla dráha určit z grafu konstantní závislosti. Téměř poloviční úspěšnost však byla v případě, kdy bylo třeba dráhu spočítat z grafu lineární závislosti procházející počátkem.

Pokud hranicemi časového intervalu nebyly přímo značky měřítka na ose t, úspěšnost klesla na 30 %. Nejmenší úspěšnost měla úloha, kde daná lineární závislost neprocházela počátkem – 25 %. Nejčastější chybou přitom bylo pouze užití vzorce $s = v{\cdot}t$, v případě lineární závislosti neprocházející počátkem to byl vzorec $s = v{\cdot}\Delta t$. *Přibližně 40 % žáků netuší, že by mohlo k dosažení správného výsledku použít výpočet plochy pod grafem.* Podobné výsledky uvádějí i dosavadní studie, včetně toho, že nejčastější chybou je pouhé užití vzorečku $s = v \cdot t$.

Také v případě, kde měli studenti spočítat vykonanou práci na základě grafu závislosti síly na dráze, se projevilo, že častou chybou studentů bylo užití vzorečku $W = F \cdot s$, viz úloha B2-2 b (s. 49). Do tohoto vzorečku za velikost síly dosazovali nejčastěji hodnotu rovnou 0 N (10 %), dále pak hodnotu rovnou velikosti maximální působící síly (8 %). 5 % studentů dosadilo za velikost síly poloviční velikost maximální působící síly. Domnívám se, že tito studenti se snažili ve svém řešení zohlednit nekonstantní závislost působící síly na dráze. Podobný postup použilo 20 % studentů při řešení úlohy A2-4 (viz poznámka 2 u tohoto příkladu na s. 48). Zde ovšem vedl ke správnému řešení, neboť v požadovaném intervalu byla závislost pouze nekonstantní lineární narozdíl od závislosti uvedené v B2-2 b. Při zmíněném postupu řešení úlohy A2-4 je zajímavé si povšimnout, jak studenti „zprůměrovali" průtok v daném intervalu. V dalším zkoumání by bylo zajímavé dále sledovat, jak studenti tyto průměry vytvářejí, zda se myšlenkové úvahy liší pro jiné křivky závislostí apod.

Studenti většinou nemají představu, jak vypadá graf závislosti dráhy na čase pro zpomalený pohyb

I.f.1 určit, v kterých částech grafu je křivka konvexní, konkávní; najít inflexní bod [1]

V úloze B2-3 b (s. 52) (graf závislosti dráhy na čase) mají studenti určit, který ze závodníků zpočátku více zrychloval. Tato úloha jim nečinila žádné potíže – úspěšnost 90 %. Poněkud horší úspěšnost (60 %) byla v úloze B2-3 c. Za zpomalený pohyb považovala čtvrtina studentů pouze pohyb v koncové části závodní dráhy. Jak málo mají studenti zažitý graf dráhy na čase pro rovnoměrný zrychlený a zpomalený pohyb, ukázala úloha A1-2. Tentokráte měli studenti sami načrtnout graf

[1] nejedná se o přesné analytické stanovení těchto bodů a analýzu průběhu funkce dané vzorcem, ale o nalezení daných bodů z tvaru funkce

závislosti souřadnice a dráhy na čase pro sled rovnoměrně zrychlených a zpomalených pohybů. Zcela správně vyřešilo úlohu jen 10 % žáků. Více jak polovina studentů (v případě souřadnice) uvedla graf, jehož křivka se skládá pouze z lineárních závislostí. V případě závislosti dráhy na čase tuto odpověď uvedlo přes 40 % žáků. 5-10 % studentů zakreslilo do grafů správně zrychlený pohyb, ale zcela opomenuli zakreslit pohyb zpomalený.

Studenti často vnímají graf jako náčrt reálné situace

I.g.1 kvalitativně popsat, jaký fyzikální děj daný graf znázorňuje

Nejvíce se tato chyba projevila v úlohách A1-5 a B1-4 (s. 56, 57). V úloze A1-5 mají studenti vybrat, který z nabízených grafů $y(t)$ charakterizuje vrhy míče. U vrhu míče šikmo vzhůru je úspěšnost velmi vysoká – 86 %, u vodorovného vrhu je už o něco nižší – 70 %. Nejméně úspěšní byli studenti u svislého vrhu vzhůru. Zde odpovědělo správně pouze 32 % z nich. Nejčetnější chybou (47 %) je výběr grafu, jehož křivka se velmi podobá trajektorii vrhu svisle vzhůru. Vzhledem k tomu, že graf $y(x)$ pro vodorovný vrh a vrh šikmo vzhůru vypadá kvalitativně stejně jako závislost $y(t)$, je možné se domnívat, že část studentů, kteří v případě II. a III. volili správnou odpověď, uvažovala špatně. Ještě výrazněji můžeme tuto chybu pozorovat při řešení příkladu B1-4. Zde měli žáci charakterizovat již zmíněné vrhy míče pomocí závislosti $x(t)$. Úspěšnost se pohybovala mezi 40-50 %, přičemž nejvíce nesprávných odpovědí (30-40 %) uvádělo graf, jehož křivka se zase podobala trajektorii. V případě vodorovného vrhu jako chybnou odpověď volili žáci z nabízených možností vodorovnou čáru, která jim zřejmě nejvíce připomínala již zmíněný vrh.

Tato chyba se také projevila v úloze A1-2 (s. 63). Studenti měli načrtnout graf závislosti dráhy a souřadnice na čase pro sled rovnoměrně zrychleného a zpomaleného pohybu Hugova jízdního kola. Zpomalený pohyb byl zadán jako brzdění Hugova kola. Načrtnutí právě tohoto brždění dělalo některým studentům potíže. 12 % studentů zakreslilo (do grafu závislosti souřadnice na čase) tento zpomalený pohyb lineární *klesající* funkcí, v případě závislosti dráhy na čase to bylo 9 % studentů.

Výskyt této chyby je možné také pozorovat v úloze B2-3 a) (s. 52). Ta dopadla poměrně dobře (úspěšnost 84 %), ale odpovědi studentů: „vyhrál B, protože měl od setkání s A kratší trať", „vyhrál B - měl kratší trať, protože stoupá plynule" či „vyhrál A, protože vykonával menší práci, jelikož dráha nebyla prudší než u B", svědčí o jasné záměně grafu $s(t)$ s trajektorií běžců. Tento typ chyby zmiňují také předchozí studie, a dále uvádějí, že s ní souvisí chybná představa studentů, kdy vnímají graf jako obrázek.

Studenti často vnímají graf pouze jako obrázek

I.g.1 kvalitativně popsat, jaký fyzikální děj daný graf znázorňuje

Tato chyba je poměrně podobná předchozí. V úloze B1-2 a) (s. 54) bylo úkolem studentů určit intervaly, v kterých Neo působil na váhu silou větší než je jeho tíha.

Nejčetnější nesprávná odpověď (téměř 10 % žáků, kteří úlohu řešili) uvádí časový interval v těsném okolí jednoho nebo obou kladných maxim. Tato volba odpovědi je, dle mého názoru, vysvětlitelná právě záměnou grafu za obrázek.

Nejvíce se však tato chyba projeví při převádění jednoho grafu zobrazující daný děj na graf zobrazující tentýž děj pomocí jiných veličin (viz vymezení dovedností III.b.1). Potvrzují to i výsledky předchozích studií. V úloze A1-6 (s. 32) měli studenti vybrat, který z grafů $v(t)$ představuje tentýž pohyb jako daný graf $x(t)$. Zde byla úspěšnost poměrně nízká – *přibližně 40* %, stejné procento *studentů vybralo graf, jehož křivka je totožná s křivkou zadaného grafu.* Také druhá nejčetnější chybná odpověď (téměř 20 %) vybírá graf s křivkou velmi podobnou té zadané.

Čtení z grafu ukazuje na špatnou fyzikální představu

I.g.1 kvalitativně popsat, jaký fyzikální děj daný graf znázorňuje

V úloze A2-2 (s. 59) měli studenti k dané situaci přiřadit graf závislosti $F(t)$, který tuto danou situaci nejlépe charakterizuje. Úlohu A2-2 1 a 3 vyřešilo správně 40 % žáků. Úlohu A2-2 2 ještě o 20 % žáků méně. Zvláště výběr distraktoru d) v úloze A2-2 2 ukazuje na skutečnost, že spíše než s vyčtením informací z grafu, měli studenti potíže s fyzikální interpretací daných dějů. Také výběr alternativy b) téměř třiceti procenty žáků v úloze A2-6 (s. 60) svědčí především o nedostatečných fyzikálních znalostech a nedostatečném pochopení daného jevu.

Volba první zdánlivě správné interpretace

I.g.1 kvalitativně popsat, jaký fyzikální děj daný graf znázorňuje
I.d.1 určit jaká změna Δy odpovídá změně Δx

Úlohy A2-1 a B1-1 (s. 60, s. 61)jsou svým zadáním poměrně podobné — studenti měli určit jaký pohyb je popsán grafem kvadratické závislosti $v(t)$. V úloze B1-1 je navíc ke každému pohybu uvedená jeho stručná charakteristika. Cílem bylo zjistit, zda bude úloha s touto nápovědou pro studenty snadnější. Úspěšnost úlohy A2-1 byla pouze 40 % , více než polovina studentů vybrala rovnoměrně zrychlený pohyb. Domnívám se, že si zřejmě nevšimli veličin, které jsou vyneseny na osách, a zaměnili tento graf za závislost dráhy na čase, tj. za „známý obrázek". Úloha B1-1 měla úspěšnost o něco vyšší (50 %) a naopak rovnoměrně zrychlený pohyb vybralo o něco méně (40 %) studentů než u předcházející úlohy. Je tedy možné, že takto poskytnutá nápověda zvýšila úspěšnost řešení dané úlohy.

Tuto domněnku by také potvrzoval výběr alternativ v úloze A1-1 (s. 61). Z uvedené nepřímé úměrnosti v grafu závislosti $p(T)$ bylo úkolem studentů určit, který děj je tímto grafem znázorněn. Pomocí veličin vynesených na osách byl každý děj stručně charakterizován. Správně odpovědělo 36 % žáků. Při vytváření této úlohy jsem se domnívala, že studenti budou nejčastěji volit alternativu c) - izotermický děj (neboť nebudou dostatečně pozorní k veličinám na osách), avšak nejčetnější nesprávnou odpovědí (44 %) bylo vybrání děje izochorického (tj. $p/T = konst.$). Domnívám se, že studentům nedělalo problém zjistit, že daná závislost nezobrazuje konstantní tlak či teplotu, ale spíše pro ně bylo obtížné objevit ve vzorci $p/T = konst.$ přímou úměrnost. Pokud by byl vzorec zadán způsobem $p = konst \cdot T$, možná by tuto špatnou odpověď zvolilo méně studentů, protože takto daná nápověda v příkladě B1-1 nejspíše napomohla k větší úspěšnosti řešení této úlohy.

Potíže při sestrojování grafu

- II.a.1 stanovit ze zadání úlohy, která veličina je závisle proměnná a která nezávisle proměnná
- II.c.1 zvolit vhodná měřítka na jednotlivých osách
- II.d.1 vynést body do grafu (z tabulky hodnot, ze vzorce apod.)
- II.d.2 body získanými z experimentálních dat a vynesenými do grafu proložit hladkou křivku odpovídající teoretické závislosti

V úloze B2-5 (s. 62) bylo úkolem studentů hodnoty dané v tabulce zobrazit do grafu. Úloha byla zaměřena na zjištění, jak žáci ovládají dovednosti uvedené pod nadpisem tohoto odstavce. Pouze čtvrtina studentů sestrojila graf, jenž správně vystihoval závislost danou tabulkou hodnot. Přestože nebyla tato úloha zařazena na konci testu, třetina studentů ji vůbec neřešila zřejmě kvůli široké odpovědi. Největší problém při řešení této úlohy se týkal měřítek na osách. 7 % studentů zvolilo velmi málo citlivé měřítko. Stejný počet pouze načrtnul osy a vyznačil měřítko na ose t; zde se domnívám, že to bylo z důvodu studentova zjištění, že je pro něho příliš obtížné zvolit měřítko i na ose ϱ. 6 % studentů ukázalo, že vůbec nepochopilo princip volby měřítek na osách. Hodnoty hustoty, které byly dány v tabulce, totiž tito studenti vynesli na osu ϱ ekvidistantně. 5 % studentů sice hodnoty hustoty pro teploty 14 °C, 12 °C a 10 °C zaneslo do grafu správně, ale co se týče hodnoty hustoty pro 8 °C, je v měřítku na ose ϱ najednou zobrazen velký skok. Domnívám se, že sestrojení grafu z tabulky celočíselných hodnot by zřejmě studentům nedělalo takové problémy jako v tomto případě.

Závěr

V této práci byly na základě dosavadních studií zabývajících se prací s grafy ve fyzice a provedení obsahové analýzy českých a amerických učebnic vytipovány dovednosti potřebné pro práci s grafy u středoškolských studentů. Dále byl proveden vlastní výzkum, jenž se podobně jako předchozí studie zaměřil na zjištění nejčetnějších chyb v práci s grafy a dovedností, jež studenti neovládají.

Výzkumu se účastnilo 483 studentů z osmi škol v České republice. Byly vytvořeny čtyři soubory testových úloh. Každý soubor obsahuje 7-9 úloh.

I v tomto výzkumu se potvrdila chyba uváděná v dosavadních studiích, která je dle mého názoru při práci s grafy vůbec nejzávažnější. A sice, že až 40 % studentů vnímá graf jako náčrt reálné situace či jako obrázek a nikoliv jako matematickou reprezentaci.

Dále se ukázalo, že přibližně 40 % studentů nezná význam směrnice grafu v daném bodě. Při určení rychlosti z grafu závislosti dráhy či souřadnice na čase často používají pouze vzoreček $v = \frac{s}{t}$. Dosavadní studie uvádějí, že studenti mají problémy zvláště při určení směrnice nelineární závislosti. Úspěšnost řešení podobných úloh v tomto výzkumu takové závěry nenaznačuje. Ukazuje, že úspěšnost spíše záleží na tom, jak samo zadání úlohy žáky k řešení „navede" (např. vyznačením vhodného intervalu), v některých případech na tom, zda funkce prochází počátkem a tedy pro výpočet průměrné rychlosti lze užít jednoduchý vzorec, ev. na dalších faktorech. Domnívám se, že ověření této domněnky by mohlo být náplní některého z dalších výzkumů.

Další poměrně závažnou chybou, na niž také upozornily předchozí studie, se ukázala být neznalost významu plochy pod grafem. Velká část studentů k dosažení správného výsledku používá pouze naučený jednoduchý vzoreček a nikoliv výpočet plochy pod grafem. Někteří studenti uváděli řešení, z něhož bylo patrné, že se v něm snažili zohlednit tvar dané lineární závislosti. Vzhledem k tomu, že někdy tímto postupem („průměrováním") dosáhli studenti správného výsledku a někdy nikoliv, bylo by zajímavé zaměřit se v dalším výzkumu na úvahy, jež vedou studenty k těmto postupům řešení. A to především kvůli možnosti navrhovat poté lepší procvičující příklady.

Provedený výzkum tedy především nastínil další možné směry zkoumání v této oblasti. Při tomto zkoumání by bylo účelné ještě hlouběji analyzovat i data shromážděná v rámci této diplomové práce. Na základě dalšího podrobnějšího výzkumu by pak bylo vhodné navrhnout a vypracovat úlohy rozvíjející dovednosti potřebné pro práci s grafy. Pro tento účel mohou být vhodnými i úlohy použité v tomto výzkumu, případně jejich varianty.

Literatura

[1] Rakovská, M., Koubek, V. (1975/76): *Žiacke predstavy o grafoch fyzikálnych funkcií*, Matematika a fyzika ve škole **5** 1975/76, 687-694

[2] Rakovská, M., Koubek, V. (1978/79): *Rozvíjanie žiackych schopností používať súradnicový graf na základnej škole*, Matematika a fyzika ve škole **9** 1978/79, 54-61

[3] Fenclová, J. (1980): *Fyzikální vědomosti našich studentů*, Studie ČSAV č.5, Academia, Praha 1980

[4] McDermott, L.C., Rosenquist, M.L., van Zee, E.H. (1987): *Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics*, Am. J. Phys. 55 (6), June 1987, 503-513

[5] Beichner, R. (1994): *Testing student interpretation of kinematics graphs*, Am. J. Phys. 62 (8), August 1994, 750-762

[6] Ješková, Z. (2000): *Testovanie schopností žiakov interpretovať grafy kinematických funkcií (závislostí)*, Obzory matematiky, fyziky a informatiky 3/2000, 44-55

[7] Ješková, Z. (2000/2001): *Testovanie znalostí študentov pri interpretácii grafov fyzikálnych závislostí z elektriny*, Matematika - fyzika - informatika **10** 2000/2001, 482-488

[8] Kolektiv autorů (2003):*Fyzika pro gymnázia*, Prometheus, Praha 2003
Bednařík, M., Široká, M.: *Mechanika*
Lepil, O.: *Mechanické kmitání a vlnění*
Bartuška, K., Svoboda, E.: *Molekulová fyzika a termika*
Lepil, O., Šedivý, P.: *Elektřina a magnetismus*
Lepil, O.: *Optika*
Bartuška, K.: *Speciální teorie relativity*
Macháček, M.: *Astrofyzika*
Štoll, I.: *Fyzika mikrosvěta*, Prometheus, Praha 2000

[9] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J. (2000): *Fyzika*, český překlad VUTIUM, Brno 2000

[10] Katalog požadavků ke společné části maturitní zkoušky v roce 2004, TAURIS, Praha 2000

[11] Hecht, E. (1998): *Physics: Calculus*, Brooks/Cole, Pacific Grove 1998

[12] Giancoli, D.C. (2000): *Physics for Scientists and Engineers*, Prentice Hall, New Jersey 2000

[13] Keller, F.J., Gettys, W.E., Skove, M.J. (1993): *Physics*, McGraw-Hill, Inc., New York 1993

[14] http://www.phy.ilstu.edu/faculty/wenning/ptefiles/302%20projects/graphing.pdf 9.11.2002

[15] http://www.msmt.cz/_DOMEK/default.asp?ARI=101310&CAI=2865 5.2.2004

[16] http://kdf.mff.cuni.cz/Heureka 3.4.2004

[17] zdroj dat: Dopravní podnik hlavního města Prahy

[18] http://www.chmi.cz/hydro/pov02/obr11.html 1.6.2003

[19] http://maps.grida.no/kyoto/ 1.6.2003

[20] http://www.grida.no/db/maps/prod/level3/id_1240.htm 1.6.2003

[21] http://www.czso.cz/cz/cisla/1/10/2002/gr/04g.htm 1.6.2003

[22] http://www.grida.no/db/maps/prod/level3/id_1250.htm 1.6.2003

Příloha

Na následujících stránkách jsou uvedeny soubory úloh, tak jak byly zadávany při vlastním výzkumu. Grafy u „úloh ze života" byly v původním zadání z důvodu lepší čitelnosti zobrazeny téměř přes celou šířku stránky. Kvůli vazbě diplomové práce jsou v těchto souborech uvedeny ve zmenšení.

Za soubory úloh následují záznamové archy, do kterých studenti zapisovali řešení. Postupy řešení uváděli na samostatný papír.