Kulové funkce

V této kapitole se budeme zabývat celou úhlovou částí Y_{ml} vlnové funkce (tzv. kulovými funkcemi). Už víme, že část závislá na φ (tj. $U_m(\varphi)$ je poměrně jednoduchá a je to jediná část celé vlnové funkce, která je komplexní.

1.) Připomeňte si, jak to dopadne s komplexností a závislostí na obou úhlech, pokud spočítáme $|Y_{ml}(\vartheta, \varphi)|^2$? Odpověď je uvedena opět na konci textu.

Na kulové funkce se budeme dívat jako na funkce všech tří prostorových proměnných r, ϑ, φ. Protože tato funkce nezávisí na r, má stejnou hodnotu podél každé polopřímky vycházející ze středu.

Pro tuto kapitolu je připravena aplikace `Legendre_3D.exe`, ve kterém se seznámíme i s prostorými možnostmi zobrazení. Je podobný tomu předcházejícímu. Grafy si opět očíslujeme, aby se nám o nich lépe hovořilo.

1	2
3	4

V celé této kapitole budeme kreslit druhé mocniny Legendrových polynomů. To znamená, že námi vykreslované funkce nezávisejí ani na φ a jsou všude kladné.

2.) Jaké funkční hodnoty nabývá kulová funkce pro polopřímky, které neleží v rovině obrazovky, resp. papíru? Jaký mají tvar oblasti, na kterých bude mít funkce stejnou hodnotu? Jak lze z 2D grafů z předcházející kapitoly získat 3D grafy? Napište svoje odpovědi a nápady:

Vysvětlení 3D grafů

Připomeňme si, že teď vykreslujeme druhé mocniny Legendrových polynomů (resp. kulových funkcí). První dva grafy již znáte z předchozí kapitoly.

Graf 3 je prostorovou analogii grafu 1. Protože teď už ale nemůžeme nakreslit všechny polopřímky vycházející z počátku, protože by se nám vzájemně za sebou schovávaly, je hodnota každé polopřímky znázorněna barvou bodu, ve kterém tato polopřímka protíná kouli.

Graf 4 je zase prostorovou analogii polárního grafu (graf 2). Konstruován je úplně stejně. Na každou polopřímku si vyneseme od počátku úsečku, jejíž délka vyjadřuje hodnotu. Protože je funkce krásně spojitá, vytvoří nám takto získané body krásnou hladkou plochu, která je na tomto grafu znázorněná. Naopak, pokud chceme z tohoto grafu odečíst hodnotu pro nějaké zvolené úhly ϑ, φ, najdeme nejprve polopřímku, která odpovídá těmto úhlům, a změříme velikost úsečky mezi počátkem a průsečíkem polopřímky a vykreslené plochy.

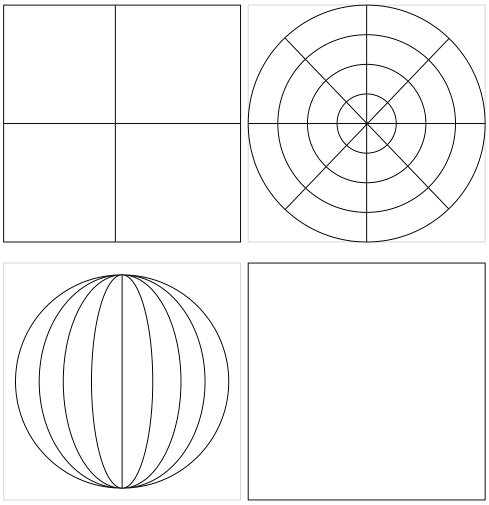
Oběma prostorovými grafy lze pomocí myši otáčet a zvětšovat a zmenšovat je. Pokud se ztratíte v tom, jak máte obrázek momentálně natočen, restartujte program. Vrátí se do původního nastavení, ve kterém je osa z svisle.

3.) Pohrejte si s programem, zobrazte si několik funkcí, prozkoumejte správnost uvedeného vysvětlení.

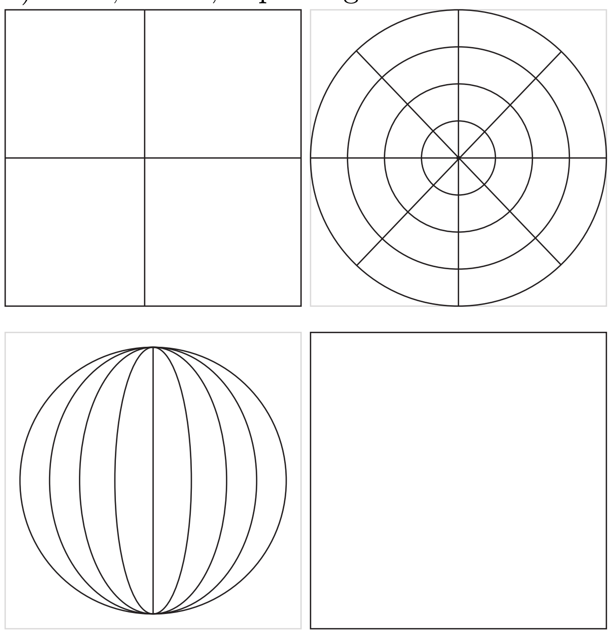
4.) Prostorové grafy 3 a 4 vzniknout tak, že plošnými (1 a 2) nějak pohybujeme. Jak? Jak říkáme této symetrii?

5.) Tento úkol je podobný jako v předchozí kapitole a měl by vám pomoci si uvědomit, zda uvedeným grafům opravdu rozumíte. **Vypněte zobrazení všech grafů**. Nastavte uvedené hodnoty kvantových čísel, zapněte daný graf, dokreslete zbylé do obrázku a pak si vše zkontrolujte. Je jasné, že kreslení prostorových obrázků je náročné, ale pokuste se na papír zachytit alespoň podstatné rysy dané plochy.

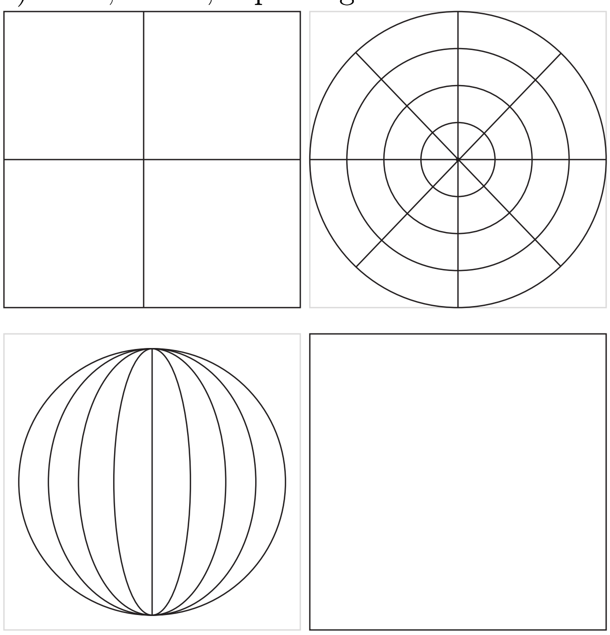
a) $l = 3, m = 2$, zapněte graf 1



b) $l = 4, m = 2$, zapněte graf 3



c) $l = 2, m = 0$, zapněte graf 4



Pokud jste v tomto úkole udělali více chyb nebo si nejste jistí tím, že podle jednoho typu grafu správně odhadnete tvar jiného typu, vyřešte si ještě několik podobných úloh dle svého výběru.

6.) Aniž byste si znova četli vysvětlení, zkuste zformulovat vlastními slovy na základě zkušeností z předchozího příkladu, co vyjadřují 3D grafy (např. jak byste popsaly, průběh funkce někomu, kdo takovýto způsob zakreslení vidí poprvé).

a) graf 3

b) graf 4

7.) Zkuste porovnat výhody a nevýhody jednotlivých typů zobrazení, plochého a prostorového, pomocí intenzity barvy nebo polárním grafem.