Legendrovy polynomy

Úkoly v této kapitole budete řešit pomocí aplikace s názvem `Legendre_2D.exe`.

Budeme se zabývat částí $T_{ml}(\vartheta)$ vlnové funkce, která závisí na úhlu ϑ - její tvar určuje tzv. přidružený Legendrův polynom, do kterého dosadíme $\cos\vartheta$. Přidružený Legendrův polynom je určen dvěma indexy (tzv. stupeň a řád) a tyto indexy odpovídájí kvantovým číslům l, m příslušného stacionárního stavu. V programu se indexy nastavují vlevo nahoře a program nepovolí nastavit nedovolenou kombinaci těchto čísel. Po změně hodnot program překreslí všechny grafy (může to chviličku trvat, protože veškeré funkce se opravdu počítají bod po bodu). Pro nízké hodnoty kvantových čísel se zobrazí i analytický tvar vykreslované funkce („vzoreček“).

Program zobrazuje stejný polynom ve třech dvojicích různých typů grafu. Aby se nám o nich lépe hovořilo, očíslujeme si grafy podle následujícího schématu:

1	2	3
4	5	6

1.) Pohrajte si s programem, vyzkoušejte různé hodnoty l, m. Vytvořte vlastní hypotézy, jak jednotlivé grafy interpretovat, jak spolu souvisí. Všechny své nápady poznamenejte. Prosím nečtěte vysvětlení uvedené dále, ale opravdu se pokuste na to přijít sami.

Popis jednotlivých grafů

V následujícím textu jsou popsány jednotlivé grafy, které program zobrazuje. Text si pečlivě přečtěte a promyslete. Zkuste označit jeho části, které jste odhalili sami.

Graf 1 je klasický kartézský graf, ve kterém je zakreslen Legendrův polynom. Všimněte si, že proměnná ϑ nabývá hodnoty mezi 0 a π.

V grafu 2 je osa z orientována svisle. Jak už víme, úhel ϑ je úhel mezi osou z a vybraným směrem (polopřímkou vycházející z počátku). Hodnota polynomu pro daný úhel ϑ je vyjádřena „intenzitou“ (sytostí, jasností) barvy, jakou je příslušná polopřímka nakreslena. Pokud je hodnota kladná, je funkce vykreslena červeně, záporné hodnoty modře.

Při konstrukci grafu č. 3 (tzv. polární graf) vynášíme hodnoty polynomu opět na příslušné polopřímky vycházející z počátku. Vezmeme polopřímku pro dané ϑ a na ní vyneseme úsečku, jejíž délka odpovídá funkční hodnotě. Protože je vynášená funkce spojitá, vytvoří koncové body všech úseček pěknou hladkou křivku. Pokud potřebujeme odečíst hodnotu z tohoto grafu, tak postupujeme obráceně. Najdeme polopřímku určenou úhlem ϑ a změříme vzdálenost počátku souřadnic a průsečíku dané polopřímky s grafem. Změřená vzdálenost odpovídá hodnotě funkce pro celou polopřímku (všechny body na polopřímce mají stejný úhel ϑ, tedy stejnou funkční hodnotu). Barvy zde fungují podobně jako v grafu 2.

Spodní řada grafů (grafy 4, 5, 6) přesně odpovídá té horní pouze je ve všech vykreslena druhá mocnina daného polynomu.

Zaměřme pozornost ještě jednou na grafy 2 a 3. Zkuste se zamyslet nad tím, proč je využita jenom půlka prostoru, který jim je vymezen.

Jejich svislá osa odpovídá reálné ose z a vodorovná ose x nebo y. Ale každý úhel ϑ odpovídá dvěma různým polopřímkám vycházejícím z počátku souřadnic, které jsou vzájemně zrcadlově symetrické vůči ose z. Nic nám nebrání v tom, vykreslit náš polynom i pro polopřímky v levé části grafu - ozrcadlením (viz tlačítko `Zrcadlení`). Nezískáme tím sice žádnou novou informaci o daném polynomu, ale výsledný obrázek bude lépe odpovídat „skutečnému prostorovému průběhu“ dané funkce.

Pozor - při zapnutém zrcadlení, nezobrazují grafy 2 a 3 průběh daného polynomu pro ϑ od 0 do 2π, ale opravdu zrcadlí průběh od 0 do π podle osy z. Zkuste najít polynom, na kterém to lze rozlišit.

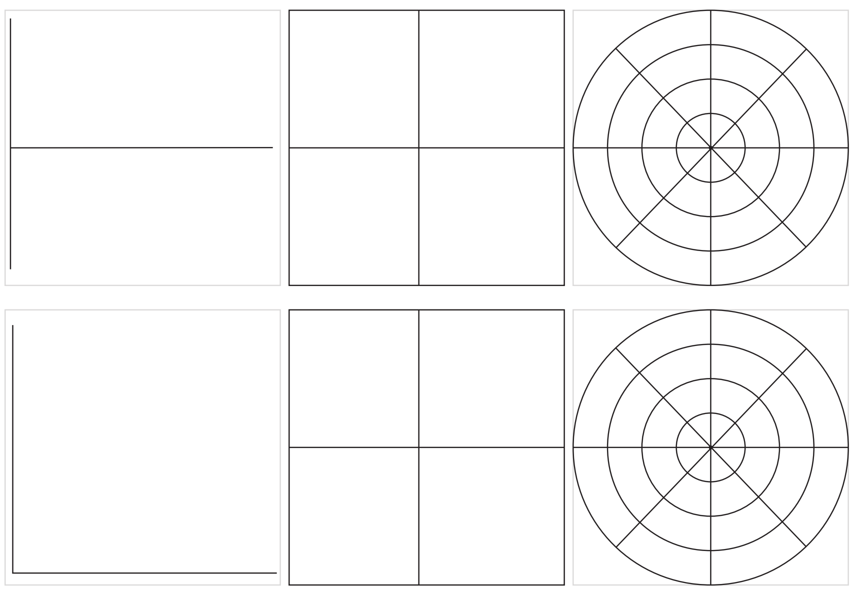
$l =$ $\quad m =$

2.) Ověřte všechny uvedené vlastnosti grafů na zobrazení několika různých polynomů - tj. zobrazte si několik různých polynomů a prozkoumejte jednotlivé grafy, zda opravdu odpovídají tomu, co bylo napsáno výše. Speciálně se zaměřte na to, jak poznat minima a maxima v jednotlivých typech grafů a zda si vzájemně odpovídají.

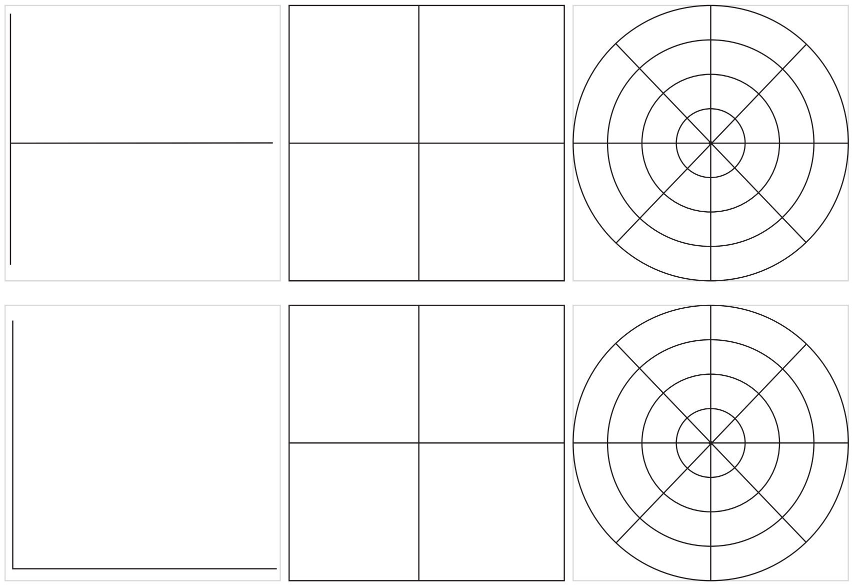
K řešení další úlohy budete potřebovat **tužky dvou barev, ideálně modrou a červenou**. Pokud použijete jiné dvě barvy, poznamenejte, která hraje roli jaké barvy.

V následujícím úkolu si ověříte, že jednotlivým typům grafů opravdu rozumíte. Vpravo nad každým grafem je malé tlačítko, kterým lze vypnout a zapnout jeho zobrazování. Navíc nahoře vpravo jsou tlačítka, kterými lze vypnout či zapnout všechny grafy najednou. Před řešením dalšího úkolu **zapněte zrcadlení a vypněte zobrazení všech grafů**.

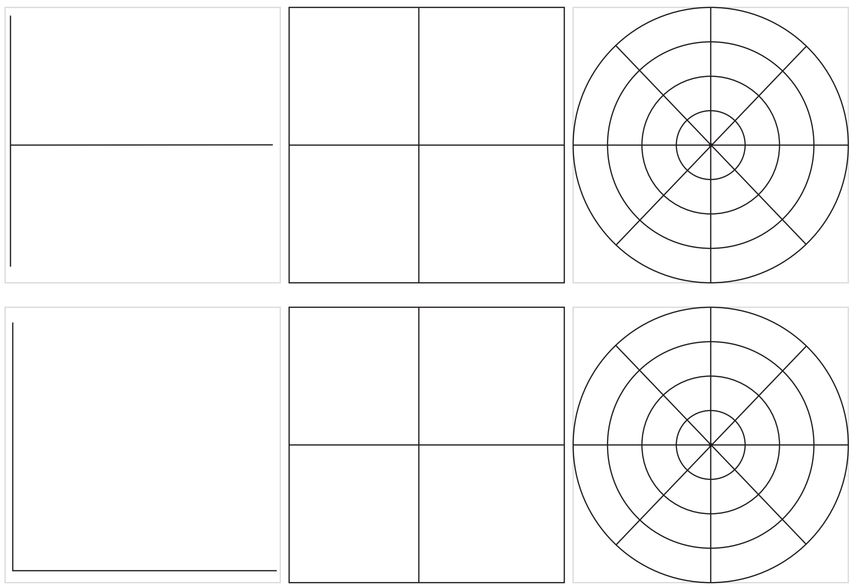
3.) a) Nastavte tyto hodnoty kvantových čísel: $l = 4, m = -1$. Potom zapněte pouze graf 1. Načrtněte do následujícího obrázku, jak budou vypadat ostatní grafy. Snažte se zachytit intenzitu barvy např. hustotou šrafování, dejte pozor na správné použití barev. Až budete mít vše zakresleno, zkontrolujte si správnost tím, že opět zapnete všechny grafy.



b) Opět vypněte všechny grafy, nastavte $l = 4, m = 2$. Zapněte tentokrát graf č. 2 a nakreslete ostatní. Po načrtnutí si nezapomeňte své výsledky zkontrolovat.



c) A poslední varianta, vypněte opět všechny grafy, nastavte $l = 3, m = 2$, zapněte graf 3, dokreslete ostatní a zkontrolujte své výsledky.



Pokud jste v tomto úkole udělali více chyb nebo si nejste jistí tím, že podle jednoho typu grafu správně odhadnete tvar jiného typu, vyřešte si ještě několik podobných úloh dle svého výběru. Je důležité si nejenom říci, jak bude funkce vypadat, ale opravdu se pokusit ji zachytit na papír, protože tím jste nuceni přemýšlet o výběru barvy, intenzitě šrafování, velikosti „kopečků“ a lépe odhalíte, jak moc jste se trefili.

4.) S grafem 1 se běžně pracuje v hodinách matematiky i fyziky na SŠ, zbylé dva typy se používají velmi zřídka (nejenom na SŠ). Aniž byste si znova četli jejich vysvětlení, zkuste zformulovat vlastními slovy na základě zkušeností získaných v předchozím příkladě, co vyjadřují (např. jak byste vysvětlili někomu, kdo je vidí poprvé, jak jim rozumět).

a) graf 2

a) graf 3

5.) Zkuste porovnat výhody a nevýhody jednotlivých typů zobrazení. Napadá vás něco z praktického života, co by se dalo dobře kreslit právě pomocí těch méně běžných grafů?

6.) Otázka spíše fyzikální. Proč nás zajímá i druhá mocnina Legendrova polynomu?