Hmotná pružina

Hmotný bod o hmotnosti M je zavěšen na pružině o tuhosti k, klidové délce l a hmotnosti m. Určete periodu kmitání hmotného bodu. Uvažujte svisle pověšenou pružinu v tíhovém poli. Porovnejte výsledek s výsledkem pro nehmotnou pružinu. Jak by se úloha změnila, pokud by pružina nebyla zavěšena v tíhovém poli?

Řešte pomocí Lagrangeových rovnic II. druhu. Napište také Hamiltonovu funkci a Hamiltonovy kanonické rovnice.

Řešení:

Úloha má jeden stupeň volnosti. Za zobecněnou souřadnici zvolíme vzdálenost hmotného bodu od místa upevnění pružiny, označíme ji x a osa bude mířit dolů = ve směru tíhového zrychlení.

Budeme řešit pomocí Lagrangeových rovnic II. druhu, proto potřebujeme vyjádřit kinetickou a potenciální energií. Jednoduché je vyjádřit kinetickou energií hmotného bodu

$$T_B = \frac{1}{2} M \dot{x}^2,$$

potenciální tíhovou energií hmotného bodu

$$V_B = -Mgx.$$

a potenciální energie pružnosti je

$$V_p = \frac{1}{2} k (x - l)^2.$$

Díky tomu, že hmotnost pružiny nemůžeme zanedbat, musíme uvažovat i její kinetickou a potenciální energií. Budeme předpokládat, že se pružina protahuje rovnoměrně, tj. zanedbáme případné rozdíly v délkové hustotě jednotlivých kousků protažené pružiny. Za předpokladu homogenního protažení pružiny je její těžiště v jejím středu a její potenciální tíhová energie je tedy

$$V_t = -mg\frac{x}{2}$$

Při počítání kinetické energie pružiny T_k budeme uvažovat, že upevněný konec pružiny se nehýbe (má nulovou rychlost), konec pružiny u hmotného bodu má stejnou rychlost jako hmotný bod, tj. $\dot{x}$ a rychlost podél pružiny rovnoměrně narůstá. Rychlost malého kousku pružiny o délce $\mathrm{d}y$ ve vzdálenosti y od místa upevnění je tedy $v(y) = \frac{y}{x}\dot{x}$. Hmotnost tohoto kousku je rovna $\mathrm{d}m = m\frac{\mathrm{d}y}{x}$. Celkovou kinetickou energii pružiny T_p zintegrujeme z příspěvků jednotlivých kousků, tj.

$$T_p = \int_0^x \frac{1}{2} m \frac{\mathrm{d}y}{x} \left(\frac{y}{x}\dot{x}\right)^2 = \frac{m\dot{x}^2}{2x^3} \int_0^x y^2 \mathrm{d}y = \frac{1}{6} m\dot{x}^2.$$

Napíšeme Lagrangeovu funkci L

$$L = T - V = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{6} m\dot{x}^2 + Mgx + mg\frac{x}{2} - \frac{1}{2} k(x-l)^2.$$

Sestavíme Lagrangeovu rovnici II. druhu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

Po dosazení dostáváme

$$M\ddot{x} + \frac{1}{3} m\ddot{x} - Mg - \frac{1}{2} mg + k(x-l) = 0$$

a po úpravě

$$\ddot{x} + \frac{k}{M + \frac{m}{3}} x = \frac{(M + \frac{m}{2})g + kl}{M + \frac{m}{3}}.$$

Vidíme, že se jedná o lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty s nenulovou pravou stranou. Nejprve je třeba vyřešit homogenní rovnici (rovnici s nulovou pravou stranou). Jedná se o rovnici pro harmonický (kmitavý) pohyb a její řešení je:

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t,$$

kde A a B jsou integrační konstanty a pro úhlovou frekvenci kmitání ω platí

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M + \frac{m}{3}}}.$$

Potom je třeba najít jedno (tzv. partikulární) řešení rovnice s pravou stranou. Vzhledem k tomu, že pravá strana je konstatní, zkusme zda by konstantní řešení tuto rovnici nesplnilo, tj. dosaďme za $x_p(t) = C$ a dostáváme:

$$0 + \frac{k}{M + \frac{m}{3}} C = \frac{(M + \frac{m}{2})g + kl}{M + \frac{m}{3}}$$

a tedy platí

$$x_p(t) = C = \frac{(M + \frac{m}{2})g}{k} + l.$$

Hodnota toho řešení odpovídá situaci, kdy hmotný bod visí na pružině v klidu, tj. nedochází ke kmitání.

Obecné řešení tedy je:

$$x(t) = \frac{(M + \frac{m}{2})g}{k} + l + A\cos\omega t + B\sin\omega t.$$

Integrační konstanty A a B bychom určili z počátečních podmínek pohybu.

Dosazením $m = 0$ dostáváme *řešení pro nehmotnou pružinu*. Pokud je porovnáme, vidíme, že jednak rovnovážná poloha pružiny je níže, pružina se vlastní vahou protáhne o $\frac{mg}{2k}$ a také frekvence kmitání je vyšší (úhlová frekvence kmitání hmotného bodu na nehmotné pružině je $\sqrt{\frac{k}{M}}$).

Pokud bychom neuvažovali tíhové pole (dosaď $g = 0$), tak se frekvence kmitání nezmění, ale rovnovážná poloha hmotného bodu bude odpovídat klidové délce pružiny.

Dále zkusme zjistit, jaký bude výsledek pro velmi těžkou pružinu, tj. $m \gg M$ (resp. hmotnou pružinu, na které nevisí závaží, tj. $M = 0$). Po dosazení dostáváme obecné řešení ve tvaru:

$$x(t) = \frac{mg}{2k} + l + A\cos\omega t + B\sin\omega t, \text{ kde } \omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

Z toho vidíme, že do rovnovážné polohy se hmotnost polohy promítne s koeficientem jedna polovina, ale do frekvence s koeficientem jedna třetina.

Vypočteme ještě *Hamiltonovu funkci* H. Nejprve určíme zobecněnou hybnost:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\ddot{x} + \frac{1}{3}m\ddot{x},$$

vyjádříme rychlost $\dot{x}$:

$$\dot{(x)} = \frac{p}{M + \frac{m}{3}}$$

a dosadíme do vyjádření pro $H = \dot{x}p - L$:

$$H = \frac{p}{M + \frac{m}{3}}p - \left[\frac{1}{2}\left(M + \frac{m}{3}\right)\left(\frac{p}{M + \frac{m}{3}}\right)^2 + Mgx + mg\frac{x}{2} - \frac{1}{2}k(x-l)^2\right],$$

což po úpravě dává

$$H = \frac{1}{2}\frac{p^2}{M + \frac{m}{3}} - Mgx - mg\frac{x}{2} + \frac{1}{2}k(x-l)^2.$$

Vidíme, že hamiltonián $H = T + V$, což vzhledem k tomu, že lagrangián L nezávisí na čase, je očekávaný výsledek a mohli jsme hamiltonián v tomto tvaru psán přímo.

Dosadíme ještě do hamiltonových kanonických rovnic:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{p}{M + \frac{m}{3}},$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \dot{p} = (M + \frac{m}{2})g - k(x-l).$$

Pokud zderivujeme první rovnici podle času a za $\dot{p}$ dosadili z druhé rovnice, dostaneme Lagrangeovu rovnici, kterou jsme již vyřešili výše.