

Co jsem dělal o prázdninách¹ na Hrašticích² v Hluboké u Skutče 2024:

Měření na „zloději joulů“ a další

Leoš Dvořák, KDF MFF UK Praha

Úvod

Následující text je stručným popisem malých „miniprojektů“, kterým jsem se věnoval na jarním soustředění pro budoucí učitele fyziky a spřízněné duše na základně Domino v Hluboké u Skutče, 30. 4. – 5. 5. 2024. Všechny se týkaly elektřiny a magnetismu.

„Zloděj joulů“

Nejprve trochu rešerše...³

Názvem v nadpisu se označuje obvod, který například i z napůl vybitého tužkového článku (s napětím třeba jen 1 volt) dokáže rozsvítit třeba bílou LED (která potřebuje přes 2,6 V). Právě proto, že dokáže „vyždímat“ další energii i z baterie, kterou bychom jinak vyhodili jako vybitou, se mu říká „zloděj joulů“.

Jde o obvod, který není nijak nový. Wikipedie nás poučí, že dané zapojení vychází z patentů už ze třicátých let minulého století, tehdy ovšem ještě s elektronkami. Populárním prý se stal zhruba od devadesátých let. Na webu k němu najdeme ohromné množství návodů a příspěvků.⁴ Dobrým výchozím zdrojem informací je stránka Wikipedie [2].

Pokud se českých zdrojů týče, návod, i s ukázkou měření osciloskopem, prezentoval na svém „Fyzikálním šuplíku“ Václav Piskač [3]. V jedné z Dílen Heuréky ho předváděl a v příspěvku [4] popsal Zdeněk Polák.⁵ Oba autoři přitom daný obvod využívají nejen ke zvýšení napětí, ale ukazují, jak se dá využít pro demonstraci bezdrátového přenosu energie – tedy jak s jeho pomocí rozsvítit LED „na dálku“ (několika centimetrů).

Za zmínku stojí, že „zloděj joulů“ už se objevil i jako žákovský příspěvek do soutěže „Vím proč“ [6].

Anglické webové zdroje, jak už bylo zmíněno, zahrnují mnoho jednoduchých návodů, viz např. [7]; na druhou stranu se o tomto tématu objevují i články v časopisech resp. příspěvky z konferencí, např. [8].⁶

Záměrem miniprojektu na Hrašticích bylo „osahat“ si daný obvod a provést na něm základní měření.

¹ Tuhle reminiscenci na [1], jsem použil u příspěvků z hraštických soustředění už několikrát ...

² Od roku 2021 nejsou jarní soustředění „pro budoucí učitele fyziky a spřízněné duše“ na dříve tradičním místě, tedy na dnes již neexistující základně na Malé Hrašticích. Ale ve zkratce stále mluvíme o tom, že „jedeme na Hrašticích“, „jak bylo na Hrašticích“ apod. (Poznámka k poznámce: Na Hrašticích bylo i letos tradičně báječně.)

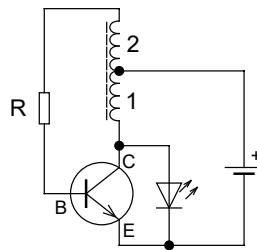
³ (provedené převážně po Hrašticích).

⁴ Google už zdá se neuvádí počty nalezených odkazů; Bing na dotaz „Joule thief“ sděluje, že jich je asi 1,9 miliónu.

⁵ Nejsou to jediné příspěvky k danému tématu na českém webu a lze zde najít i starší stránky k tomuto tématu, např. [5]. Není ovšem účelem tohoto textu zkoumat, kdo o „zloději joulů“ něco v češtině publikoval jako první.

⁶ Lze najít i příspěvek z Indonésie, kdy zdrojem je baterie využívající ananas (zřejmě podobně, jako u nás demonstrujeme galvanický článek zapíchnutím dvou kovů do citrónu), a pomocí zloděje joulů a násobiče napětí z diod a kondenzátorů se napětí zvýší na více než tisíc voltů. (Tady raději citaci neuvádím, aby někoho neinspirovala ke stavbě podobného zdroje vysokého napětí.)

Schéma zapojení nejjednodušší verzi zloděje joulů je na obr. 1. (Odpovídá zapojením v [3] a [4] a s drobnou modifikací také v [2].)



Obr. 1. Nejjednodušší zapojení „zloděje joulů“

Jak obvod funguje, je vysvětleno např. v [2], takže jen stručně, spíše názorně a bez detailů: Po zapojení baterie začne přes vinutí cívky 2 a rezistor téci proud do báze tranzistoru, díky tomu se tranzistor „otevře“, skoro jako by kolektor a emitor byly vodivě spojeny. Vinutím 1 cívky tedy narůstá proud.⁷ Navíc se přitom ve vinutí 2 indukuje napětí, které přispívá k otevření tranzistoru. Proud ale nemůže narůstat do nekonečna (například díky vnitřnímu odporu zdroje, odporu cívky apod.). Když přestane narůstat, ve vinutí 2 už se nic neindukuje, poklesne tedy proud do báze a tranzistor se trochu „přivře“, čili omezí proud kolektorem a tím i cívkou 1. Při poklesu proudu cívkou 1 se ale v cívce 2 indukuje napětí, které ještě více sníží proud do báze, tím se ještě více sníží proud kolektorem a tak dále... takže se tranzistor velmi rychle „zavře“ – názorně řečeno, jako bychom mezi kolektorem a emitorem přerušili vodivé spojení.⁸ Díky prudkému poklesu proudu se ale v cívce 1 indukuje napětí, a to i výrazně vyšší než napětí baterie, kterou obvod napájíme. Cívka se prostě „brání proti změně“, tedy snaží se proud zachovat. Takže ho (opět jednoduše a názorně řečeno) „procpe“ LEDkou. Napětí indukované v cívce 1 spolu s napětím baterie přitom bude takové, které LEDka pro svou činnost potřebuje. Když tam nebude jedna LED, ale více LED v sérii, tak se prostě napětí zvýší natolik, aby jimi proud protékal.

Tolik základní teorie a teď z čeho reálně obvod sestavit:

Cívka s odbočkou uprostřed může být vinuta na feritovém toroidním jádře (tak je to v [2] a [3] a v řadě dalších návodů na internetu) nebo může být bez jádra (pak jde o cívku poněkud větších rozměrů (např. průměru 5 nebo 10 cm, jak je to v [4], podobně v [3]). Počet závitů návody udávají např. dvakrát 20, někdy i víc. Tranzistor je typu NPN, na typu příliš nezáleží, já jsem používal BC337. Odpor rezistoru R návody často udávají 1 k Ω .

Toroidní jádro jsem neměl, takže jsem experimentoval s cívkou na feritové tyčce o průměru 1 cm a délce 24 cm.⁹ Cívky byly vinuty smaltovaným měděným drátem o průměru 0,19 mm, měly 100 a 100 závitů. Užíval jsem i cívky bez jádra¹⁰, ty měly 20 a 20 závitů, stejným smaltovaným drátem. Rezistor R měl odpor 1 k Ω , případně (s dalšími odpory do série) 11 k Ω nebo 21 k Ω . Místo jedné LED nakreslené ve schématu na obr. 1 byla zkoušena i sestava více LED v sérii. Šlo až o 10 LED (všechny bílé), k jejichž rozsvícení tedy bylo potřeba až asi 26 V. Zdrojem byl tužkový článek 1,5 V, v jednom případě dva tyto články v sérii.

⁷ Nemůže se zvětšit okamžitě, protože cívka se velmi rychlému nárůstu proudu brání.

⁸ Názorně si to můžeme představit, jako by mezi C a E byl vypínač, který se právě rozepnul.

⁹ Za její zapůjčení děkuji Zdeňkovi Drozdovi.

¹⁰ Závitů jsem vinul podle kalíšku termosky Vítko Bočka, pak jsem je stáhnul a zafixoval omotáním stejným drátem.

Výsledky pokusů a jednoduchých měření:

- 1) Obvod fungoval jak s cívkami na feritové tyčce, tak s cívkami bez jádra.
- 2) Ze zdroje o napětí 1,5 V obvod rozsvítil i 10 bílých LED v sérii.¹¹ Při stejných parametrech ostatních součástek je pak ovšem svit jednotlivých LED menší, než když je zapojena jen jedna LED.
- 3) Odběr proudu z baterie příliš nezávisí na počtu sériově zapojených LED. Např. pro $R = 11 \text{ k}\Omega$ byl pro 1 LED odběr 19,8 mA, pro 10 LED 20,7 mA.
- 4) Odběr proudu z baterie roste s klesajícím odporem R : Pro $R = 21 \text{ k}\Omega$ byl $I_{\text{bat}} \doteq 12,3 \text{ mA}$, pro $R = 21 \text{ k}\Omega$ byl $I_{\text{bat}} \doteq 20,7 \text{ mA}$, pro $R = 1 \text{ k}\Omega$ byl $I_{\text{bat}} \doteq 66 \text{ mA}$.
- 5) S cívkami na feritové tyčce byla frekvence kmitů (zjištěná pomocí osciloskopu) jednotky kHz. Mírně přitom závisela na počtu připojených LED: pro $R = 1 \text{ k}\Omega$ byla při jedné LED 3,36 kHz, při 10 LED 4,17 kHz.
- 6) Frekvence kmitů roste s rostoucím R . Při $R = 11 \text{ k}\Omega$ byla při jedné LED 10,7 kHz, při 10 LED asi 16 kHz.
- 7) Proud LEDkami protéká v krátkých „špičkách“¹², viz obr. 2. Poměr šířky píku ku periodě závisí na počtu LED v sérii. Například pro $R = 1 \text{ k}\Omega$ je pro 1 LED $\Delta t/T \approx 0,25$, pro 10 LED je $\Delta t/T \approx 0,029$.



Obr. 2. Průběh proudu LEDkami v závislosti na čase (fotografie z osciloskopu).

Vlevo pro jednu LED, vpravo pro 10 LED v sérii.

- 8) Maximální proud (ve špičce píku) ale na počtu LED téměř nezávisí. Pro $R = 1 \text{ k}\Omega$ je $I_{\text{max}} \approx 100 \text{ mA}$ jak pro jednu, tak pro 10 LED.
- 9) Maximální proud ve špičce ovšem závisí na hodnotě R , s klesajícím R špičkový proud roste: pro $R = 21 \text{ k}\Omega$ je $I_{\text{max}} \approx 22,5 \text{ mA}$, pro $R = 11 \text{ k}\Omega$ je $I_{\text{max}} \approx 32,5 \text{ mA}$, pro $R = 1 \text{ k}\Omega$ je $I_{\text{max}} \approx 100 \text{ mA}$.
- 10) Z maximálního proudu LEDkami a poměru šířky pulzu vůči periodě lze odhadnout výkon, který obvod dává do LEDek.¹³ Porovnáním s příkonem z baterie pak dostaneme účinnost. Pro jednu LED tímto výpočtem vyšla účinnost: pro $R = 21 \text{ k}\Omega$ asi 72 %, pro $R = 11 \text{ k}\Omega$ asi 50 %, pro $R = 1 \text{ k}\Omega$ asi 33 %. (Pro 10 LED vyšly účinnosti o něco větší, asi 88 %, 66 % a 40 %.) Vyšší účinnosti vycházejí pro vyšší hodnoty odporu R , pro které ovšem LED méně svítí. Vzhledem ke způsobu výpočtu je ale třeba uvedené výsledky brát jen jako odhady, resp. jako hodnoty orientační.¹⁴

¹¹ Tady dal napětí určitě vyšší než asi 26 V. (Víc LED v sérii jsem nezkoušel, ono nelze jít do nekonečna, tranzistor také mezi kolektorem a emitorem vydrží jen omezené napětí.) Zkoušena byla samozřejmě funkce pro všechny počty LED v rozmezí 1 až 10.

¹² To lze ostatně očekávat z výše uvedeného popisu funkce. Pozn.: Průběh proudu byl snímán osciloskopem připojeným k rezistoru o odporu 10Ω , který byl v sérii s LEDkami.

¹³ Dále uváděné údaje vycházejí ze zjednodušeného výpočtu, kdy pokles proudu s časem považujeme za lineární, takže „plochu pod křivkou“ bereme jako $(1/2) \cdot I_{\text{max}} \cdot \Delta t$. Průměrný proud je pak $(1/2) \cdot I_{\text{max}} \cdot \Delta t/T$, průměrný výkon získáme vynásobením napětím na LEDce (resp. více LEDkách), protože to je na proudu téměř nezávislé.

¹⁴ Zajímavé, ovšem výrazně náročnější, by bylo měřit světelný tok z LED napájených daným obvodem a příkon vztahovat k tomuto toku.

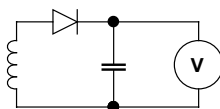
11) S většími cívkami bez jádra obvod funguje podobně, jen měl o něco větší odběr proudu (pro $R = 11 \text{ k}\Omega$ byl odběr asi 30 mA). Při přiblížení další cívky (dále ji zde označuji jak o sekundární) stejného průměru s 20 závity na vzdálenost asi centimetr nebo méně, se rozsvítila zelená LED připojená k této cívce. Počet bílých LED zapojených v sérii ve „zloději joulů“ ovšem musel být 3 nebo více, případně musely být tyto LED zcela odpojeny.



Obr. 3. Připojení LED k sekundární cívce

12) Pro demonstraci přenosu energie (rozsvícením LEDky připojené k sekundární cívce) je vhodnější použít cívku o více závitů: při 100 závitů již mohla být sekundární cívka vzdálena od primární o cca 3 cm a zelená LED svítila.

13) Pro měření maximálního napětí, které se v sekundární cívce indukuje, byla cívka připojena přes diodu (usměrňovací, typu 1N4007) ke kondenzátoru (svítkovému, s kapacitou 0,1 μF); napětí na kondenzátoru bylo měřeno multimetrem, viz obr. 4.

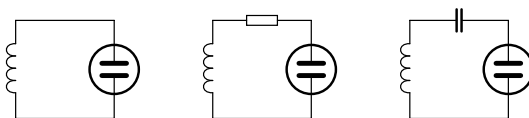


Obr. 4. Měření maximálního napětí na sekundární cívce.

Při těsném přiblížení sekundární cívky se 100 závity k cívkám „jouleova zloděje“ bylo naměřeno 32 V (pro $R = 11 \text{ k}\Omega$); pro $R = 1 \text{ k}\Omega$ pak 52 V.

14) Sekundární cívka o 100 závitů nedokázala rozsvítit malou doutnavku.¹⁵ Ale se sekundární cívkou s 250 závitů se (při $R = 1 \text{ k}\Omega$ a napětí baterie 3 V) podařilo doutnavku rozsvítit.¹⁶ Počet sériově zapojených LED ovšem musel být větší než 3, případně byly tyto LED zcela odpojeny.

15) Doutnavka svítila jasně při přímém spojení s sekundární cívkou; slabě svítila i při spojení přes rezistor s odporem 100 $\text{k}\Omega$ ¹⁷, viz obr. 5. Doutnavka svítila, i když místo rezistoru byl použit kondenzátor. Stačil přitom i kondenzátor z allobalových elektrod, mezi nimiž byla plastová fólie; stačilo, když elektroda byla čtverec o straně asi 5 cm.¹⁸ Doutnavka svítila, i když elektrodami byli dva lidé¹⁹ ve vzdálenosti zhruba půl metru.²⁰



Obr. 5. Doutnavka připojená k sekundární cívce (přímo, přes rezistor nebo přes kondenzátor).

¹⁵ Není divu, zápalné napětí malých doutnavek se udává asi 70 V.

¹⁶ Měření napětí podle předchozího bodu ukázalo 87 V, tedy s rezervou vyšší než zápalné napětí doutnavky.)

¹⁷ Když byl odpor rezistoru 220 $\text{k}\Omega$, doutnavka už nesvítila.

¹⁸ Měření kapacity tohoto kondenzátoru dalo hodnotu 80 až 12 pF (podle toho, jak se elektrody k fólii přitiskly).

¹⁹ Konkrétně autor tohoto příspěvku a Vít Boček – zřejmě se ale nedá předpokládat, že by svit diody ovlivňovaly osobnostní vlastnosti či psychický stav obou zúčastněných. :-) (Testováno to ovšem nebylo. :-))

²⁰ Není ovšem jasné, zda se na tom nemohla zčásti podílet třeba vodivost podlahy, na izolační podložky jsme si nestoupali. Osobně bych se ale spíše přikláněl k hypotéze, že příčinou byla kapacita.

16) Dodejme, že s cívkami na feritové tyčce obvod fungoval (a LED rozsvítil) už od napětí baterie asi 0,5 V, rozsvítil ovšem jen dvě až tři LED. (Fungoval i při trochu nižším napětí, až asi 0,4 V, ale při odpojení a opětovném připojení zdroje už při tomto nižším napětí „nenaskočil“.)

Poznámka k parametrům cívek: Cívka 200 závitů na feritové tyčce (uprostřed) měla indukčnost asi 5,9 mH; jednotlivá vinutí (po 100 závitěch) indukčnost asi čtvrtinovou. Indukčnost cívky bez jádra o průměru 7 cm (40 závitů) byla naměřena 0,31 mH; indukčnosti dílčích vinutí po 20 závitěch byly naměřeny 0,105 a 0,087 mH.

Další pokusy:

„Zloděj joulů“ fungoval, i když byla LED připojena ne mezi kolektor a emitor, ale přímo k vinutí 1 cívky.

Pro cívky na feritové tyčce se ukázalo, že vliv má přiblížení feritového magnetu ke konci tyčky.²¹ Přiblížení magnetů zvýšilo frekvenci kmitů a zároveň svit LEDky připojené k sekundárnímu vinutí slábl. Patrně to bylo způsobeno nasycením materiálu feritové tyčky. Tato hypotéza byla ověřována měřením indukčnosti cívky na feritové tyčce LC metrem. Přiblížení výše zmíněného permanentního magnetu ke konci tyčky vedlo k tomu, že naměřená indukčnost klesala, z původních skoro 6 mH až na asi 2,1 mH při „přicvaknutí“ magnetu na konec tyčky.²²

Co by bylo vhodné dále prozkoumat a vyřešit:

- Vyzkoušet nějaké aplikace „zloděje joulů“, viz např. [9].
- Vyzkoušet nějaká alternativní schémata zapojení (např. [10] nebo [11]), zda by v některých zapojeních byla vyšší špička indukovaného napětí nebo zda by některá zapojení neměla vyšší účinnost.
Pozn.: Některé webové stránky to naznačují již svým názvem, např. [11] – tam také stojí za shlédnutí krásná názorná simulace činnosti daného obvodu.
- Zjistit, jak je to s indukovaným napětím na cívce „zloděje joulů“, když přímo v něm nejsou žádné LED, tedy když je využíván jen pro demonstraci přenosu energie do sekundární cívky. (Danému zapojení se říká „blokovací oscilátor“, viz např. [12], kde je uvedeno i více variant zapojení.)
Zjistit, co vlastně omezuje velikost indukovaného napětí a proč špička indukovaného napětí nezničí tranzistor, tedy „neprorazí“ přechod (resp. dva přechody) mezi kolektorem a emitorem.²³ Podobně by mohla špička indukovaného napětí z vinutí 2 prorazit v závěrném směru přechod báze-emitor.²⁴ Tranzistor se ale zjevně neničí, i když u sebe nemá žádné ochranné prvky; bylo by vhodné pochopit, proč tomu tak je.
- Obecně by bylo zajímavé umět vlastnosti „zloděje jouleů“ odvodit i teoreticky, alespoň přibližně. Například umět spočítat závislost frekvence a rychlosti náběhu proudu cívkou na parametrech součástek. (Nějaké teoretické výpočty lze nalézt na webu [13], ale nejsou dotaženy do konkrétních hodnot a porovnány s měřenými hodnotami.)
Obecně ale asi nelze očekávat, že bychom nějakým jednoduchým odvozením dostali příliš přesné výsledky týkající se chování obvodu. V pokusech se totiž ukázalo, že třeba frekvence kmitání je ovlivněna už přiblížením sekundární cívky s připojenou LED apod.

²¹ Šlo o nápad Vítka Bočka. Magnety byly feritové hranoly (4 cm × 2 cm, výška 1 cm), kterých byl celý sloupeček, takže celková výška byla skoro 20 cm.

²² Je zajímavé, že malý neodymový magnet o průměru 1 cm neměl tak velký účinek. Patrně záleží na celkovém magnetickém toku.

²³ Použitý tranzistor BC337 má v dokumentaci uvedenu maximální hodnotu napětí mezi kolektorem a emitorem jen 50 V.

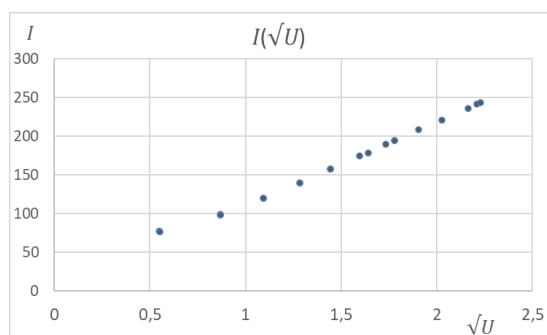
²⁴ Ten má uvedeno maximální napětí jen 5 V.

Voltampérová charakteristika žárovky

Že se žárovka díky zahřívání vlákna nechová jako „obyčejný“ rezistor a že tedy na ní závislost mezi napětím a proudem není lineární, je jasné. Na jednom z kurzů pro učitele ale padl dotaz, zda lze závislost proudu na napětí na žárovce vyjádřit nějakým vzorcem.

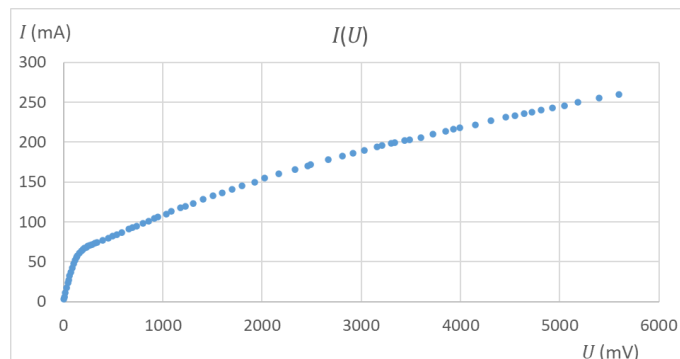
Objevil se názor, že tato závislost má tvar $I \sim U^{3/5}$. S teoretickým odvozením tohoto vztahu se setkáme v různých pramenech, třeba ve sbírce řešených úloh [14]²⁵ nebo ve studentské práci [15]. Jako další hračtícký miniprojekt mi přišlo zajímavé uvedenou závislost prověřit.²⁶

Užíval jsem žárovku 3,5 V / 0,2 A. Měření na Hrašticí ukazovala, že závislost je zřejmě složitější, než výše uvedená $I \sim U^{3/5}$. Při napětích od asi 0,3 V odpovídala závislost $I(U)$ spíše odmocnině, viz obr.6.



Obr. 6. Závislost proudu žárovkou na napětí (resp. na odmocnině z U). Proud je v mA, napětí ve V.

Při nižších napětích se navíc závislost proudu na napětí viditelně měnila. Proto byla stejná žárovka proměřena ještě jednou po návratu z Hraštic. Výsledek ukazuje obr. 7.



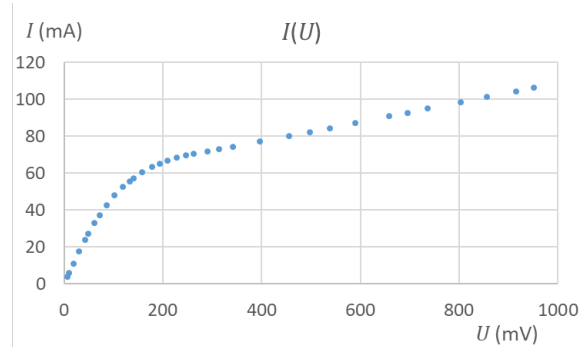
Obr. 7. Voltampérová charakteristika žárovky 3,5 V / 0,2 A.

Zjevně je vidět, že charakteristika zřejmě nejde jednoduše vystihnout jednoduchým vztahem typu U^α . Už proto, že charakteristika se kolem napětí zhruba 0,2 V poměrně výrazně „lomí“.

²⁵ Kladně je třeba hodnotit, že zde jsou specifikovány výchozí předpoklady a v odpovědi je uvedeno „Při teplotách výrazně vyšších, než teplota okolí je proud procházející žárovkou úměrný $U^{3/5}$.“ (To výrazně vyšších je podstatné, byť, jak dále uvidíme, i při nich se daná teoretická předpověď poněkud liší od výsledků měření.)

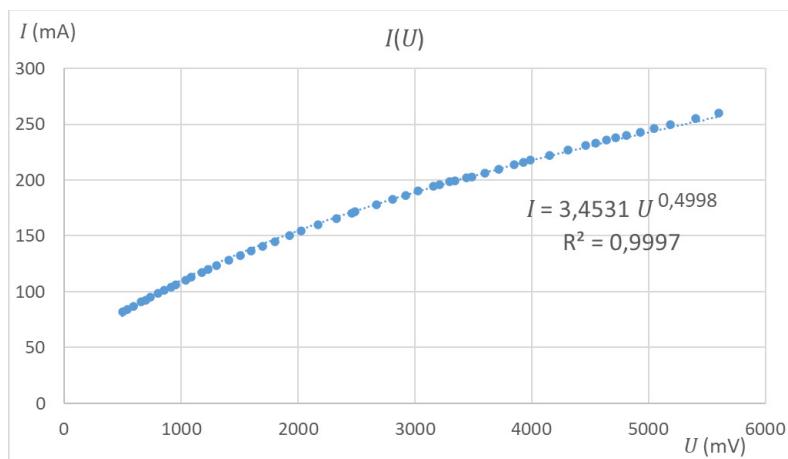
²⁶ Původní motivací bylo zkusit, zda se V-A charakteristika nezmění, když se baňka žárovky obalí alobalem. Ten by totiž měl světlo a tepelné záření odrážet zpátky na vlákno žárovky. To by se mělo více zahřívát, což by zvýšilo jeho odpor, takže charakteristika by měla být jiná. Tohle se ale při měření nepotvrdilo – proč tomu tak je a zda by odrazem záření zpět na vlákno šlo změnit charakteristiku, bude zajímavé prozkoumat někdy v budoucnu. (Poznámka: Vítek Boček se iniciativně zeptal Chatu GPT4, jak se na charakteristice žárovky projeví obalení baňky hliníkovou fólií, a GPT4 si také „myslí“, že by se to projevilo na charakteristice. Ale umělá inteligence zatím reálný pokus provést nemůže, tak je to na nás...)

Průběh proudu při malých napětích ukazuje obr. 8. Je vidět, že ve skutečnosti nejde o ostrý zlom, ovšem závislost se mění skutečně významně.



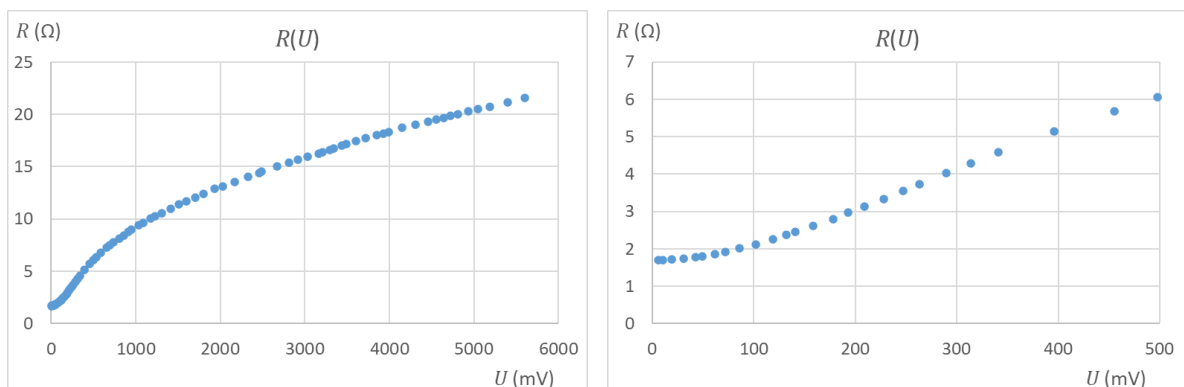
Obr. 8. Průběh proudu při malých napětích.

Při vyšších napětích (od 0,59 V do 5,6 V) lze voltampérovou charakteristiku aproximovat mocninovou závislostí²⁷. Nalezená závislost je $I \sim U^{0,4998}$, tedy prakticky $I \sim \sqrt{U}$, viz obr. 9. (Přesná hodnota exponentu ovšem záleží na tom, v jaké oblasti charakteristiku aproximujeme, viz Dodatek C.)



Obr. 9. Závislost proudu na napětí při $U \gtrsim 0,6$ V a její proložení mocninovou závislostí.

Zajímavé je vykreslit i závislost odporu vlákna žárovky²⁸ na napětí. Výsledek ukazuje obr. 10, jak pro celý průběh, tak detail v oblasti napětí do 0,5 V.

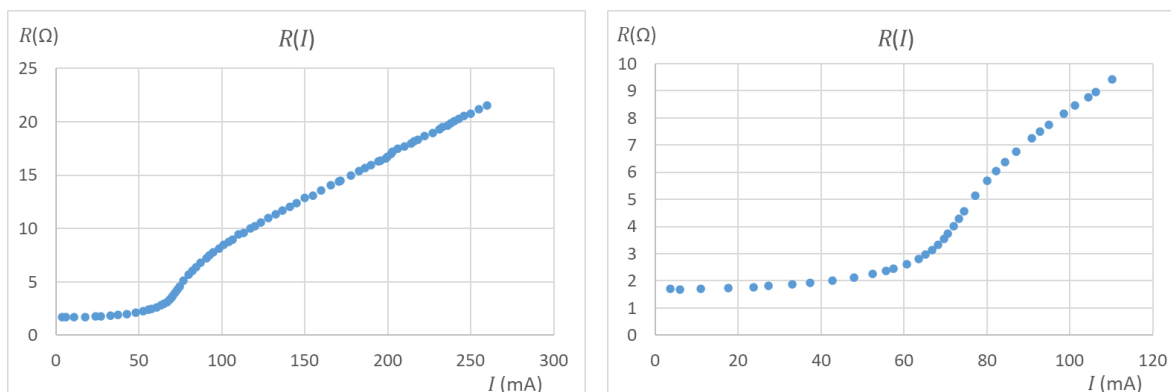


Obr. 10. Závislost odporu žárovky na napětí.

²⁷ Provedeno v Excelu.

²⁸ Zde míníme statický odpor, tedy poměr $R = U/I$.

Zajímavý je i průběh odporu v závislosti na proudu, ten ukazuje obr. 11, opět celkový průběh a detail v oblasti malých proudů.



Obr. 11. Závislost odporu žárovky na proudu.

Vidíme, že naměřené výsledky se liší od závislosti $I \sim U^{3/5}$, která se někdy uvádí jako teoretická. Bylo by tedy vhodné naměřené výsledky alespoň zčásti pochopit a vysvětlit.

Jak naměřené závislosti vysvětlit

Při odvození závislosti $I \sim U^{3/5}$ se předpokládá, že odpor vlákna žárovky je úměrný teplotě.²⁹ Reálně je ovšem závislost odporu na teplotě složitější. Lze ji vyjádřit polynomem, článek [16] však uvádí, že odpor wolframu v závislosti na teplotě lze vystihnout vztahem $R/R_0 = (T/T_0)^{1,2}$.³⁰

Tato závislost je zřejmě reálnější než přímá úměrnost $R \sim T$ už proto, že z přímé úměrnosti a poměru odporů při maximálním a minimálním napětí v měření by teplota vlákna žárovky při napájecím napětí 5,6 V vyšla asi 3710 K, což už by bylo o něco vyšší než tabulková teplota tání wolframu (3695 K, viz [17]).³¹

Výpočtem analogickým k odvození v [14], ale s využitím $R \sim T^{1,2}$, vyjde teoretická závislost mezi napětím a proudem při vyšších teplotách jako $I \sim U^{0,54}$. (Jednoduché odvození je uvedeno v Dodatku A.) Výsledný exponent se sice nerovná 0,5, jak nám téměř přesně vycházel v pokusu, ale je nižší, než ve [14] a jinde uváděných 0,6.

Rozdíl hodnot 0,54 a z měření plynoucích 0,5 (resp. 0,51, viz Dodatek C) lze možná vysvětlit tím, že závislost $R \sim T^{1,2}$ je jen přibližná. Navíc možná mohou výsledky záviset na typu žárovky. V článku [18] autoři měřili charakteristik tří různých typů žárovek a exponenty jim vyšly jednou 0,51 a dvakrát 0,56.

Uvedené výsledky ovšem platí až pro vyšší teploty. Jak vysvětlit V-A charakteristiku při malých napětích?

„Zlom“, resp. spíš ohyb charakteristiky viditelný výše na obr. 7 a 8 není dán nějakou chybou měření. Projevuje se při opakovaných měřeních a je vidět např. i ve výsledku na webové stránce vzdálené laboratoře [19].

²⁹ Ve [14] je to explicitě uvedeno jako předpoklad.

³⁰ R_0 a T_0 jsou odpor a absolutní teplota při 0°C.

³¹ Žárovka by přitom zřejmě vydržela ještě o něco vyšší napájecí napětí, nechtěl jsem ale riskovat přepálení jejího vlákna pro případ, že by bylo třeba měření na stejné žárovce zopakovat.

Že se tvar charakteristiky liší pro malá a velká napětí, je ovšem pochopitelné. Pro malá napětí, tedy při nepřilíživě vysokých teplotách vlákna žárovky, není totiž hlavním mechanismem ochlazování vlákna záření, ale vedení tepla (přes přívody do okolí). (Oba mechanismy uvažuje například článek [20].) Při zanedbání ztrát zářením tedy musí být příkon do žárovky úměrný rozdílu teploty vlákna žárovky a okolí. Z toho lze odvodit úplný začátek V-A charakteristiky. Možnou aproximaci s jednoduchým odvozením uvádí Dodatek B, souvislost teploty vlákna s napětím na žárovce Dodatek C.

Dvě další drobnosti

Dobíjení ploché baterie

S Vítkem Bočkem jsme zkusili zčásti dobít napůl vybitou plochou baterii.³² Plochou baterii vybitou asi na 3,8 V jsme nabíjeli proudem 130 mA po dobu asi 2 hodiny. Nabíjení bylo ze zdroje nastaveného na 7 V, proud byl omezen žárovčkou. Napětí na baterii se při měření zvýšilo asi na 5,4 V, pak postupně klesalo, až asi na 4,8 V.³³ Nabíjení jsme pak ukončili. Baterie měla výsledné napětí asi 4,3 V, při zatížení žárovčkou kleslo na 3,7 V.

Šlo zatím jen o první orientační zkoušku; pozitivní bylo, že baterie nijak „nevytekla“ ani nebyla zahřátá. Bylo by zajímavé proměřit chování baterie při nabíjení podrobněji a zjistit, nakolik dokáže zvýšit, resp. obnovit její kapacitu.

Leidenská láhev

Spíše krátkou hříčkou bylo zhotovení leidenské³⁴ láhve z prázdné sklenice od borůvkové biomarmelády.³⁵ Dovnitř jsem nalil obyčejnou kohoutkovou vodu a do ní dal zvonkový drát jako přívod. Vnější elektrodou byl v první verzi alobal, v druhé verzi byla i vnější elektrodou voda, tentokrát ve velkém kelímku od jogurtu Holandia.³⁶ Měřič kapacity ukázal 471 pF, viz obr. 12. Přiléváním a odebíráním vody ze sklenice šlo kapacitu měnit.³⁷



Obr. 12. Leidenská „bio“-láhev.

³² Plochá baterie není nabíjecí, ale kdysi byl (v časopise Amatérské radio nebo možná Radiový konstruktér) krátký článek, že nepřilíživě vybité zinko-uhlíkové články lze malým proudem dobíjet a prodloužit jim tak životnost.

³³ Po důvodu tohoto chování jsme nepátrali. Možná by šlo uvažovat, zda nejde o snižování vnitřního odporu baterie při nabíjení, ale to je jen hypotéza.

³⁴ Psaní s měkkým „i“ a tvrdým „y“ kolísá, resp. lze se setkat s oběma tvary.

³⁵ Takže by šlo říci, že to byla leidenská bio-láhev. :-)

³⁶ Vzhledem k lokaci města Leiden to bylo stylové...

³⁷ Dostí bláznivým nápadem pro budoucí pokusy by bylo využít takovou leidenskou lahev jako kondenzátor s proměnnou kapacitou pro nějaký laděný obvod, třeba v nějakém generátoru... :-)

Závěr

Jak „zloděj joulů“, tak charakteristika žárovičky jsou tématy, která by bylo zajímavé v budoucnu ještě blíže prozkoumat; totéž platí pro další dvě zmíněná drobná témata.

Další témata, o nichž jsem pro letošní Hraštici uvažoval, jsem už nestihl. Naopak jsem si odvezl nové náměty od ostatních účastníků, například na generátor kmitů se dvěma tranzistory, několika rezistory a jen jedním kondenzátorem. Inspirativní také bylo vidět, s jak slabým magnetickým polem může fungovat známá konstrukce motorku s několika závity, kdy místo komutátoru je drát tvořící osu oškrábán jen z poloviny, takže tvoří přerušovač. Stále tedy bude co zkoumat a zkoušet...

Poděkování

Děkuji organizátorům jarních hraštických soustředění, Zdeňce Koupilové a Petrovi Kácovskému³⁸, za vše, co pro jejich zajištění a hladký průběh dělají.³⁹ Za vedení odborného programu⁴⁰ děkuji Vítkovi Bočkovi. Za gastronomickou podporu bádání a dalších aktivit děkuji Věře Koudelkové⁴¹.

Poděkování za materiální a finanční podporu celé akce patří též naší mateřské fakultě (MFF UK) a Elixíru do škol.

Literatura

- [1] Pratchett, T.: *Zajímavé časy*. Český překlad Talpress, 1998.
- [2] Wikipedia: *Joule thief*. Dostupné online: https://en.wikipedia.org/wiki/Joule_thief
- [3] V. Piskač: *Joule thief – „zloděj Joulů“*. Fyzikální šuplík, 2015. Dostupné online: https://fyzikalnisuplik.websnadno.cz/elektro/zlodej_joulu.pdf
- [4] Z. Polák: *Bezdrátový přenos energie*. In: Dílny Heuréky 2017, Ed. V. Koudelková. Matfyzpress, 2018. s. 73-77. Dostupné online: <https://kdf.mff.cuni.cz/heureka/ke-stazeni/sborniky-dilen-heureky/>, konkrétně: <https://kdf.mff.cuni.cz/heureka/ke-stazeni/sborniky-dilen-heureky/sborniky/SbornikDilenHeureka2017.pdf>
- [5] WhiteBear: *Joule thief*. (8. července 2013) Dostupné online: <https://www.white-bear.cz/joule-thief.html>
- [6] Š. Pavlica (technická a odborná podpora: Z. Hubáček): *Návod na spínaný zdroj pro bezdrátový přenos energie*. Dostupné online na vzdělávacím portálu ČEZ Svět energie v rámci soutěže Vím proč: <https://www.svetenergie.cz/cz/vim-proc/video/1831>
- [7] AH Electronics: *Wireless Electricity Transmission Circuit*. Dostupné online: <https://www.instructables.com/Wireless-electricity-transmission-circuit/>

³⁸ Byť ten letos kvůli rodinným povinnostem nebyl přímo na místě, ale významně se podílel na přípravě.

³⁹ Zdeňce díky i za vedení mimoodborného programu, od odpoledních her po malé „hříčičky“. („Propojování hemisfér“ bych měl asi o dlouhých zimních večerech trénovat.) Díky i za vyvěšené matematické úlohy.

⁴⁰ A za to, že mi půjčoval digitální osciloskop. A za jazykové vtípky.

⁴¹ Tuto podporu vysoce oceňovali všichni účastníci. Osobně se u mě kvalita dané podpory projevila i kvantitativně na hmotnosti a objemu. :-)

- [8] R. Chobda et al.: *Joule Thief and its Applications*. International Journal for Research in Applied Science & Engineering Technology 9, issue XII (Dec. 2021), 31-34. Dostupné online: <https://www.ijraset.com/best-journal/joule-thief-and-its-applications>
- [9] J. Sujatha et al.: *A Review on Joule Resurrection Circuit and its Applications*. International Journal of Advanced in Management, Technology and Engineering Sciences, 2018. Dostupné online: https://www.researchgate.net/publication/343501246_A_Review_on_Joule_Resurrection_Circuit_and_its_Applications
- [10] Lionel Sear: *Greatly Improved Joule Thief*. Dostupné online: <https://www.electro-tech-online.com/threads/greatly-improved-joule-thief.165840/>
- [11] Hyper-Efficient Joule Thief. Dostupné online: <https://everycircuit.com/circuit/4874320891871232/hyper-efficient-joule-thief>
- [12] Blocking Oscillators: An Introduction Into its Working, Types, and Uses. Dostupné online: <https://www.wellpcb.com/blocking-oscillators.html>
- [13] MONOSTABLE BLOCKING OSCILLATORS. Dostupné online: https://mycollegevcampus.com/sicet/notes/L_-_22_MONOSTABLE_BLOCKING_OSCILLATORS.pdf
- [14] Sbírka řešených úloh: *Vyzařování a voltampérová charakteristika žárovky*. Dostupné online: <https://reseneulohy.cz/614/vyzarovani-a-voltamperova-charakteristika-zarovky>
- [15] I. Hejna: *Voltampérová charakteristika žárovky. Projekt pro volitelnou fyziku*. Dostupné online: <https://www.gymnaziumtu.cz/files/ivan-hejna.pdf>
- [16] B. S. N. Prasad, R. Mascarenhas: *A laboratory experiment on the application of Stefan's law to tungsten filament electric lamps*. Am. J. Phys. 46, 420–423 (1978) <https://doi.org/10.1119/1.11299>
- [17] Wikipedia: *Wolfram*. Dostupné online: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Wolfram>
- [18] J. R. Martínez, D. Krug: *Voltage-Current Characteristic of Incandescent Lightbulbs: Measurement and Analysis*. (July 2013) Dostupné online na Research Gate: https://www.researchgate.net/publication/251567174_Voltage-Current_Characteristic_of_Incandescent_Lightbulbs_Measurement_and_Analysis
- [19] Remote-LAB GymKT: *Voltampérová charakteristika žárovky*. (část Aparatura, je zde příklad grafu výsledku) Dostupné online: <http://remote-lab.fyzika.net/experiment/07/experiment-7-aparatura.php?lng=cs>
- [20] M. Carlà: *Stefan–Boltzmann law for the tungsten filament of a light bulb: Revisiting the experiment*. Am. J. Phys. **81**, 512–517 (2013). Dostupné online: <https://doi.org/10.1119/1.4802873> ; volně dostupné na https://www.researchgate.net/publication/258757261_Stefan-Boltzmann_law_for_the_tungsten_filament_of_a_light_bulb_Revisiting_the_experiment

Dodatek A: Teoretický výpočet V-A charakteristiky žárovky (při vyšších teplotách)

Podle [16] lze závislost odporu R wolframového vlákna na teplotě vystihnout vztahem

$$R/R_0 = (T/T_0)^{1,2}, \quad (1)$$

kde T je absolutní teplota a R_0 a T_0 jsou odpor a teplota při 0°C . Lehce lze ale ukázat, že (1) platí, i když za R_0 a T_0 vezmeme hodnoty při nějaké jiné teplotě, například pokojové.

Z (1) můžeme vyjádřit teplotu z hodnoty odporu jako

$$T/T_0 = (R/R_0)^\alpha, \quad \text{kde } \alpha = \frac{1}{1,2}. \quad (2)$$

Pro další odvození nám bude stačit vyjádření

$$T \sim R^\alpha. \quad (3)$$

Při vyšších teplotách ztrácí vlákno žárovky energii převážně zářením.⁴² Podle Stefanova-Boltzmannova zákona je jeho výkon úměrný čtvrté mocnině teploty,

$$P \sim T^4. \quad (4)$$

Dosazením (3) získáme vztah spojující vyzařovaný výkon P s odporem vlákna:

$$P \sim T^4 \sim R^{4\alpha}. \quad (5)$$

Příkon žárovky je

$$P_{\text{příkon}} = U \cdot I = \frac{U^2}{R}. \quad (6)$$

Výkon se rovná příkonu⁴³, takže $U^2/R \sim R^{4\alpha}$, čili

$$U^2 \sim R^{4\alpha+1}. \quad (7)$$

Odtud

$$R \sim U^{\frac{2}{4\alpha+1}}. \quad (8)$$

Proud žárovkou určíme z Ohmova zákona a po úpravách dostaneme výsledek:

$$I = \frac{U}{R} \sim \frac{U}{U^{\frac{2}{4\alpha+1}}} = U \cdot U^{-\frac{2}{4\alpha+1}} = U^{1-\frac{2}{4\alpha+1}} = U^{\frac{4\alpha+1-2}{4\alpha+1}} = U^{\frac{4\alpha-1}{4\alpha+1}} = U^{\frac{4-1/\alpha}{4+1/\alpha}}. \quad (9)$$

Kdybychom místo (3) uvažovali lineární závislost mezi odporem a teplotou, bylo by $\alpha = 1$ a exponent $\frac{4-1/\alpha}{4+1/\alpha}$ by vyšel $\frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}$, tedy tak, jak se často uvádí. Ovšem když je $\alpha = 1/1,2$, je exponent v (9):

$$\frac{4-1/\alpha}{4+1/\alpha} = \frac{4-1,2}{4+1,2} = \frac{2,8}{5,2} = \frac{7}{13} \doteq 0,54. \quad (10)$$

Teoreticky odvozená V-A charakteristika žárovky při vyšších teplotách je tedy

$$I \sim U^{7/13}. \quad (11)$$

Poznámka: V měření na konkrétní žárovici vyšel exponent o něco menší, asi 0,5. Příčin, které mohou způsobovat danou odchylku, může být zřejmě víc. Jednak vztah (1) nemusí vystihnout závislost odporu na teplotě dostatečně přesně. Navíc, jak zmiňují některé články, emisivita wolframu závisí na teplotě⁴⁴. A konečně, v odvození jsme uvažovali, že teplota je v celém vlákne stejná; vzhledem k odvodu tepla přívodními vodiči to zjevně nebude splněno přesně.

⁴² Ztrátu energie vedením tepla v dalším odvození v tomto Dodatku zanedbáme.

⁴³ Jde nám o ustálený stav.

⁴⁴ I když to by mohlo posunout exponent naopak k vyšším hodnotám.

Dodatek B: Teoretický výpočet V-A charakteristiky žárovky při nižších teplotách

Při nižších teplotách vlákna, tedy při nízkých napětích na žárovce, zřejmě bude možno zanedbat výdej energie zářením a uvažovat jen ztráty energie vedením tepla. Výkon daný těmito ztrátami je úměrný rozdílu teploty vlákna T a teploty okolí T_0 :

$$P \sim (T - T_0) . \quad (12)$$

Rozdíl vyjádříme pomocí odporů vlákna (s využitím(2))⁴⁵:

$$P \sim (T - T_0) = T_0 \left(\frac{T}{T_0} - 1 \right) \sim \left(\left(\frac{R}{R_0} \right)^\alpha - 1 \right) \quad (13)$$

Příkon žárovky (6) upravíme,

$$P_{\text{příkon}} = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2}{R_0} \cdot \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-1} , \quad (14)$$

a z rovnosti výkonu a příkonu dostaneme

$$\frac{U^2}{R_0} \sim \left(\frac{R}{R_0} \right) \cdot \left(\left(\frac{R}{R_0} \right)^\alpha - 1 \right) . \quad (15)$$

Pro další úpravy označíme

$$\frac{R}{R_0} \stackrel{\text{ozn}}{=} r , \quad (16)$$

takže (15) získá tvar

$$r \cdot (r^\alpha - 1) \sim U^2 . \quad (17)$$

Proud I je z Ohmova zákona

$$I = \frac{U}{R} \sim \frac{U}{r} . \quad (18)$$

Kdybychom ze (17) uměli vyjádřit r , dosazením do (18) bychom dostali teoretický vztah pro V-A charakteristiku, tedy její část při malých napětích. K funkci $f(x) = x \cdot (x^\alpha - 1)$ však zřejmě neexistuje inverzní funkce vyjádřitelná jednoduchým vztahem⁴⁶. Rovnici $x \cdot (x^\alpha - 1) = y$ bychom samozřejmě mohli řešit numericky nebo graficky, to nám však předpis ve tvaru jednoduchého vzorce nedá.

Pro úplný začátek charakteristiky však můžeme závislost r na U^2 určit alespoň přibližně. Pro $T=T_0$ je $r=1$ a pro malá napětí se tedy r nebude příliš lišit od jedničky. Vztah (17) tedy můžeme pro malá napětí přibližně psát jako

$$1 \cdot (r^\alpha - 1) \sim U^2 , \quad \text{čili } r^\alpha - 1 \approx kU^2 , \quad (19)$$

kde k je nějaká neznámá konstanta.⁴⁷ Odtud

$$r \approx (1 + kU^2)^{1/\alpha} , \quad \text{čili } R \approx R_0 \cdot (1 + kU^2)^{1/\alpha} \quad (20)$$

Po dosazení do (18) dostaneme pro závislost proudu na napětí (pro malá U) přibližný vztah

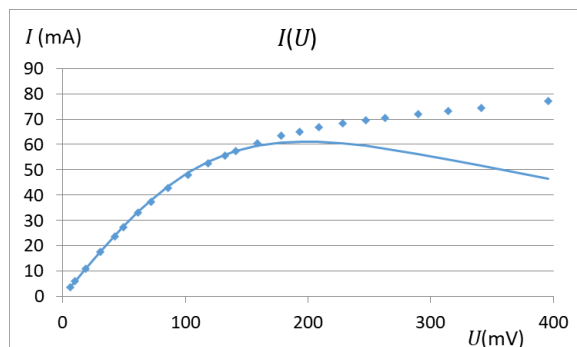
⁴⁵ Za teplotu T_0 můžeme i ve vztahu (2) brát teplotu okolí, viz text za vztahem (1).

⁴⁶ Například Wolfram Alpha žádné takové řešení nenabídl.

⁴⁷ Závisí na tepelném odporu mezi vláknem žárovky a okolím, ten neznáme.

$$I \approx \frac{U}{R_0 \cdot (1 + kU^2)^{1/\alpha}} \quad (21)$$

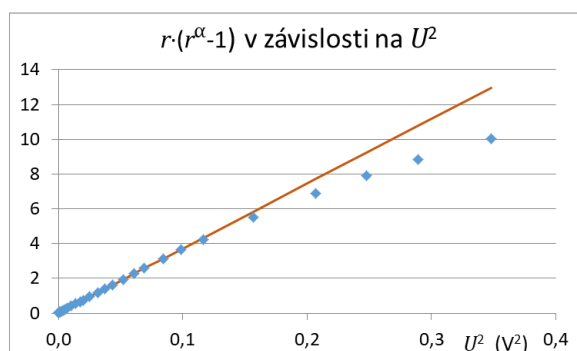
Konstantu k určíme tak, že teoretickou závislost (21) „nafitujeme“⁴⁸ na počáteční část naměřené voltampérové charakteristiky; přitom $1/\alpha = 1,2$. Výsledek ukazuje obr. 13.



Obr. 13. Porovnání naměřených hodnot a aproximace (21) pro malá napětí.

Aproximace (21) zjevně nevystihuje charakteristiku dobře pro napětí vyšší než asi 150 mV. To je do velké míry dáno tím, že naše řešení vztahu (17) opravdu platí jen pro malá napětí.

Závislost (17) odvozená pro případ, kdy ztráty energie vlákna jsou dány jen vedením tepla, totiž odpovídá naměřeným datům velmi dobře až do $U^2 \approx 0,1 \text{ V}^2$, tedy asi až do napětí 0,3 V (a s malou odchylkou až do 0,4 V), viz obr. 14.



Obr. 14. Teoretická závislost (17) a její porovnání s hodnotami z naměřených dat.

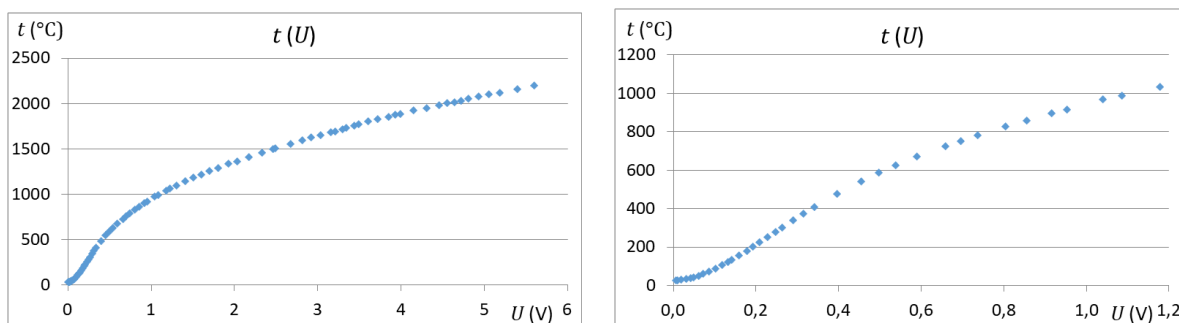
Takže pokud by se podařilo najít nějaký „rozumný“ jednoduchý vztah dobře aproximující inverzní funkci k $f(x) = x \cdot (x^\alpha - 1)$, získali bychom teoretický vztah popisující začátek V-A charakteristiky až do napětí skoro 0,4 V.

⁴⁸ Například v Excelu s využitím doplňku Řešitel. Takto to bylo provedeno i pro získání obr. 13.

Dodatek C: Teplota vlákna žárovky a další poznámky ke srovnání naměřené V-A charakteristiky s teorií

Teplota vlákna žárovky

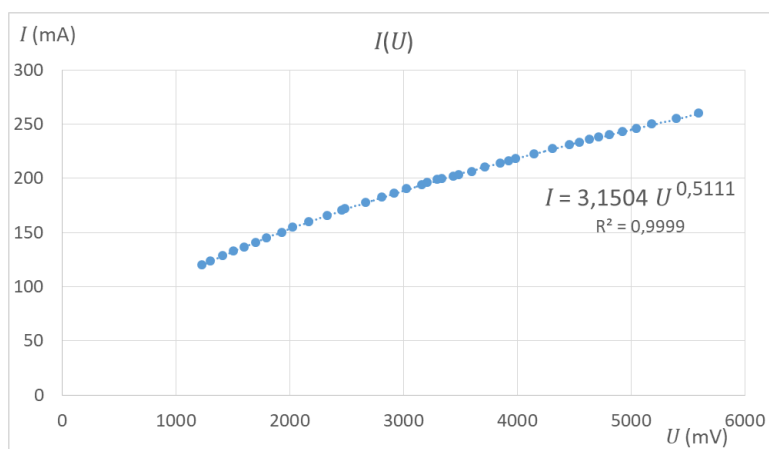
Ze vztahu (2) a hodnot odporu vlákna určených z U a I můžeme vypočítat teplotu vlákna žárovky v závislosti na napětí. Obr. 15 ukazuje tyto teploty ve stupních Celsia.



Obr. 15. Teplota vlákna žárovky vypočtená z jejího odporu. (Celkový průběh a detail pro malá napětí.)

Aproximace V-A charakteristiky pro vyšší teploty: záleží na tom, od kterých napětí křivku prokládáme

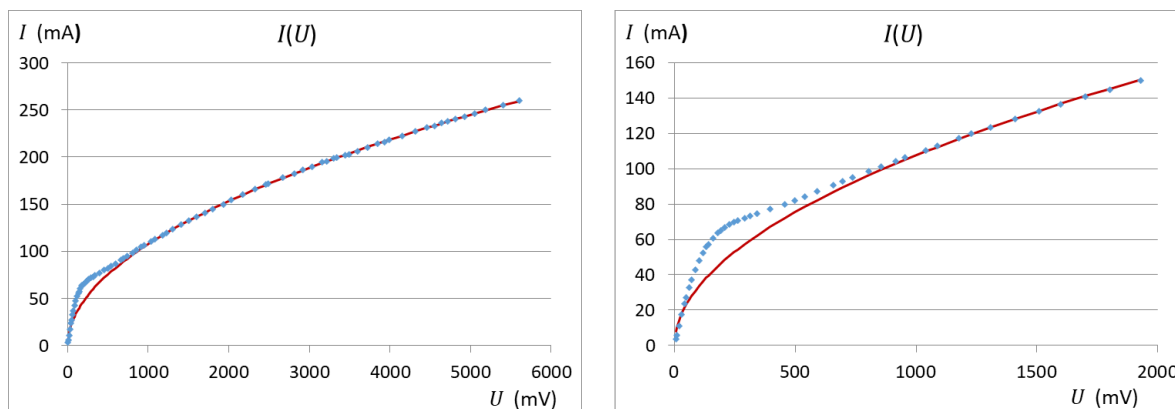
Obr. 9 výše ukazoval aproximaci charakteristiky provedenou pro napětí vyšší než asi 0,6 V; aproximovaná mocninná závislost měla exponent 0,4998. Jak ale ukazuje obr. 16, pokud pro aproximaci užijeme data až od napětí 1,2 V, vyjde exponent 0,5111.⁴⁹



Obr. 16. Závislost proudu na napětí při $U \geq 1,2$ V a její proložení mocninnou závislostí.

Je zajímavé vykreslit závislost s tímto exponentem pro celý průběh charakteristiky. Výsledek ukazuje obr. 17.

⁴⁹ To se nám může líbit, protože je bližší výše odvozené teoretické hodnotě $7/13 \doteq 0,5385$. Ovšem neplatí, že kdybychom charakteristiku aproximovali od ještě vyšších napětí, přiblížili bychom se těm $7/13$ ještě lépe (či třeba úplně přesně, to bychom chtěli od přírody moc ☺).



Obr. 17. Voltampérová charakteristika žárovičky, porovnání s aproximací z obr. 16.

Vlevo celkový průběh, vpravo detail pro malá napětí (do 2 V).

Je vidět, že aproximace pro vyšší teploty je použitelná od napětí asi 1 V. Pohled na obr. 15 nám ukáže, že to je od teplot asi 900 °C.

Pro nižší napětí (a tedy pro nižší teploty) se zřejmě v odvádění energie z vlákna žárovky významněji uplatní vedení tepla.

Při nižších teplotách bychom navíc samozřejmě měli uvažovat, že vlákno žárovky nejen vyzařuje, ale dopadá na něj také tepelné záření z okolí. Vztah (4) bychom tedy měli nahradit vztahem

$$P \sim (T^4 - T_0^4) . \quad (22)$$

Ovšem například pro napětí 0,5 V vychází teplota asi 600 °C, takže v absolutních teplotách je poměr $T/T_0 \approx 3$, což dá $(T/T_0)^4 \approx 81$. To znamená, že výkony spočtené z (4) a (22) se liší jen o něco víc než o procento.

Poznámka:

Ztráty energie vlákna jak zářením, tak vedením se uvažují v článku [20], který lze doporučit jako užitečný zdroj informací. V daném článku ovšem nejde o V-A charakteristiku, ale o to, že na žárovce lze dobře demonstrovat Stefanův-Boltzmannův zákon.