

Leoš Dvořák

Pružné kyvadlo: od teoretické mechaniky k pokusům a zase zpátky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 51 (2006), No. 4, 312--327

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/141331>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2006

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Pružné kyvadlo: od teoretické mechaniky k pokusům a zase zpátky

Leoš Dvořák, Praha

Článek [1], který vyšel z práce řešené se středoškolským studentem, je inspirující. Upozorňuje na zajímavý problém, s nímž jsme se leckdo mohli někdy potýkat v praktikách i jinde. Navíc může vyprovokovat snahu „poprat se“ s tímto problémem ještě lépe, místy do větší hloubky — a také se blíže seznámit s tím, co už je v této oblasti hotovo. Samozřejmě se tím utvrdíme v názoru, že vyřešeno je na jisté úrovni již prakticky všechno. Ovšem i tak jde o problém, který může být zajímavý například pro vysokoškolské přednášky a cvičení z teoretické mechaniky. A možná v nějaké formě i pro úvodní partie mechaniky či pro základní fyzikální praktika.

Následující text je proto veden snahou ukázat, jak by například ve výuce zmíněných partií bylo možno k problému pružného kyvadla přistupovat sice jednoduše, ale přitom pokud možno přesně a snad i elegantně — a co vše by se na tomto problému mohl student naučit.

Pružné kyvadlo — odvození rovnic

Podívejme se tedy na problém pružného kyvadla, kývajícího v jedné rovině, z pohledu studenta, který se ve vysokoškolském studiu začal seznamovat s teoretickou mechanikou.

Náš student zřejmě pro řešení problému zvolí polární souřadnice r a φ (protože úhlovou souřadnici je zvyklý používat při řešení pohybu kyvadla). Zapiše v těchto souřadnicích kinetickou energii $T = \frac{1}{2}m(\dot{r})^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\varphi})^2$ a potenciální energii $V = -mgr \cos \varphi + \frac{1}{2}k(r - l_0)^2$. Zde, samozřejmě, m je hmotnost kyvadla (tedy „hmotného bodu“ na konci závěsu), g gravitační zrychlení, k tuhost pružiny a l_0 její délka v neprotáženém stavu (viz obr. 1). Z lagrangiánu $L = T - V$ pak může odvodit přesné rovnice daného problému. (Dostal by tak rovnice (3) z článku [1].) Tyto rovnice jsou však pro analytické řešení příliš komplikované.

Student ví, že problém se zjednoduší, omezí-li se na kmity s malými výchylkami od rovnovážné polohy dané minimem potenciální energie. I bez parciálního derivování V snadno určí, že $\varphi_{\text{rov}} = 0$ (kyvadlo v rovnováze visí dolů) a $r_{\text{rov}} = l_0 + mg/k$, neboť pružina se natáhne o délku $r_{\text{rov}} - l_0$, aby svou silou vyrovnala tíhu závaží, $k(r_{\text{rov}} - l_0) = mg$. (V souladu s [1] označíme $r_{\text{rov}} = l_g$.) Místo se souřadnicí r tedy

Doc. RNDr. LEOŠ DVOŘÁK, CSc. (1952), katedra didaktiky fyziky, Matematicko-fyzikální fakulta UK, V Holešovičkách 2, 180 00 Praha 8, e-mail: Leos.Dvorak@mff.cuni.cz

nadále bude pracovat se zobecněnou souřadnicí

$$\xi = r - l_g, \quad \text{kde} \quad l_g = l_0 + \frac{mg}{k}. \quad (1)$$

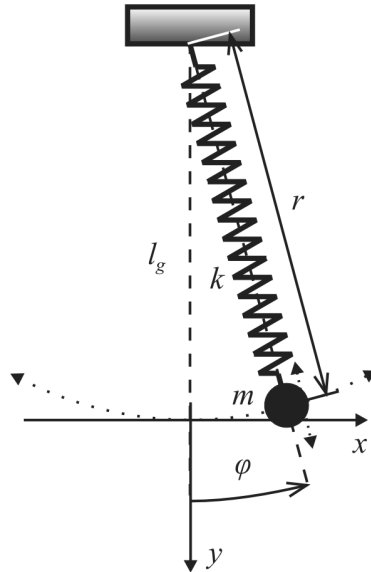
Protože již v teoretické mechanice probral kapitolu Malé kmity, nasadí student standardní postup. Rozvine lagrangián do členů druhého řádu v ξ a φ a z výsledného $L = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + l_g^2\dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2}(mgl_g\varphi^2 + k\xi^2)$ (plus konstanta, kterou lze ignorovat) odvodí Lagrangeovy rovnice druhého druhu. Získá tak

$$\ddot{\xi} + \Omega_r^2\xi = 0 \quad \text{a} \quad \ddot{\varphi} + \omega_\varphi^2\varphi = 0, \quad (2)$$

kde

$$\Omega_r = \sqrt{k/m} \quad \text{a} \quad \omega_\varphi = \sqrt{g/l_g}, \quad (3)$$

tedy dvě nezávislé rovnice, jejímiž řešeními jsou harmonické kmity s úhlovými frekvencemi danými (3).



Obr. 1. Pružné kyvadlo — popis.

Kde ale zůstal ten skutečně zajímavý jev, tedy vzájemná interakce kyvů a kmitů pružiny? Je zřejmé, že členy druhého řádu k jeho popisu nestačí. (Student si může uvědomit, že v aproximovaném lagrangiánu nejsou členy, které by kombinovaly ξ a φ , resp. jejich derivace, takže výsledné rovnice musí být zcela separovány.)

Jestliže členy druhého řádu nestačí, je přirozené doplnit aproximaci o členy dalšího, tedy *třetího* řádu. Nemáme-li nějaký zvláštní důvod některé členy vypustit, je třeba do takové aproximace zahrnout *všechny* členy třetího řádu. (Na nutnost uvažovat všechny členy třetího řádu upozorňuje např. [2]. Důvodem, proč některé členy vypustit, by

mohla být pouze skutečnost, že by byly příliš malé v poměru k ostatním. To by mohlo nastat například, pokud by se velmi výrazně lišily frekvence kyvů a kmitů, což však obecně není náš případ.)

Pokud student doplní aproximovaný lagrangián o členy třetího řádu, získá (až na konstantu)

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + l_g^2\dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2}(mgl_g\varphi^2 + k\xi^2) + ml_g\xi\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}mg\xi\varphi^2. \quad (4)$$

Interakční členy obsahující $\xi\dot{\varphi}^2$ a $\xi\varphi^2$ napovídají, že vzájemné ovlivňování kmitů a kyvů již bude v této aproximaci popsáno. A opravdu: Lagrangeovy rovnice druhého druhu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

po drobných úpravách vyjdou

$$\ddot{\xi} + \Omega_r^2\xi = l_g(\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\omega_\varphi^2\varphi^2), \quad (5a)$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_\varphi^2\varphi = \omega_\varphi^2\frac{\xi}{l_g}\varphi - 2\frac{\dot{\xi}}{l_g}\dot{\varphi}. \quad (5b)$$

(Poznámka pro čtenáře, kteří si chtějí odvození zkontrolovat: Při odvození rovnice (5b) úpravy zahrnují dělení rovnice členem $(1 + 2\xi/l_g)$, který vyjde u $\dot{\varphi}$, následný rozvoj členu $(1 + 2\xi/l_g)^{-1}$ a zanedbání členů vyššího než druhého řádu.)

V rovnici pro kmity (5a) je na pravé straně „budící“ člen závislý na kyvech; analogicky je tomu i v rovnici (5b).

Rovnice (5) jsou samozřejmě odvozeny za předpokladu malých výchylek z rovnováhy, tedy pro $|\varphi| \ll 1$, $|\xi| \ll l_g$. Poznamenejme ještě, že k těmto rovnicím lze dospět i z Newtonových pohybových rovnic (tedy z rovnic (3) v [1]), ponecháme-li v nich všechny členy druhého řádu v proměnných ξ , φ a $\dot{\xi}$, $\dot{\varphi}$.

Malá odbočka: kdo jaké rovnice užívá

Srovnání s článkem [1] ukáže, že jeho autoři v aproximovaných rovnicích, z nichž dále vycházejí (rovnice (6) v [1]), nemají dva členy, které nám výše vyšly v rovnicích (5). Tyto členy, konkrétně $-\frac{1}{2}l_g\omega_\varphi^2\varphi^2$ a $\omega_\varphi^2(\xi/l_g)\varphi$, jsou ovšem řádově stejně velké jako členy, které autoři článku [1] ve svých rovnicích ponechávají. Jejich aproximované rovnice jsou proto vhodné spíše ke kvalitativní diskusi řešení celého problému. Chceme-li získat výsledky kvantitativně přesnější, je třeba v rovnicích (5) ponechat celé pravé strany a nic z nich nevypouštět.

(Je pravda, že členy, které v článku [1] v aproximovaných rovnicích chybějí, jsou „v průměru“ poněkud menší než členy, které v nich autoři ponechali. Např. pro kyvy s úhlovou frekvencí ω_φ , tedy pro kyvy neovlivněné kmity, je vidět, že člen $-\frac{1}{2}l_g\omega_\varphi^2\varphi^2$ je co do velikosti „v průměru“ polovinou členu $l_g\dot{\varphi}^2$. Oba tyto členy se navíc mění se stejnou frekvencí, takže je jasné, že ke kvalitativnímu popisu či k určení frekvence rázů například v případě „dominantních kyvů“ stačí autorům [1] jejich rovnice (6).)

Poznamenejme ještě, že ve většině článků, jež se problému pružného kyvadla už od 70. let věnují (např. [2–8]), užívají autoři spíše kartézské souřadnice x , y . V nich je totiž jednodušší jak aproximovaný lagrangián

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - \omega_\varphi^2 x^2 + \dot{y}^2 - \Omega_r^2 y^2 - \lambda y x^2),$$

tak rovnice

$$\ddot{x} + \omega_\varphi^2 x = -\lambda xy, \quad \ddot{y} + \Omega_r^2 y = -\frac{1}{2}\lambda x^2, \quad \text{kde } \lambda = (\Omega_r^2 - \omega_\varphi^2)/l_g. \quad (6)$$

(Směr souřadnicových os x , y je vyznačen na obr. 1, takže $x = r \sin \varphi$, $y = r \cos \varphi - l_g$.) Náš student by si samozřejmě musel dát pozor na to, že v člancích je na pravé straně rovnic často opačné znaménko, protože užívají svislou souřadnici mířící vzhůru, někde se užívá souřadnic dělených l_g , někde je $m = 1$ apod. — ale jistě se od nás dozví radu, že na takovéto věci si musí při studiu článků zvykat.

My budeme v dalším odvození, kvůli možnosti srovnání s [1], řešit problém i nadále v polárních souřadnicích. Na některých místech přitom upozorníme na souvislosti s řešením v x a y .

Dále ukážeme, jak by mohl náš hypotetický student přibližně řešit rovnice (5) a o čem všem by se přitom mohl poučit.

Dominantní kyvy: nic složitého

Vyšetřujme nejprve, v souladu s [1], případ kyvů, které nejsou prakticky ovlivněny podélnými kmity pružného kyvadla. Místo (5b) tedy náš student vezme druhou z rovnic (2), zajásá, že jde o starou dobrou rovnici pro harmonický oscilátor, a napíše její řešení například ve tvaru

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_\varphi t).$$

Toto řešení dosadí do pravé strany rovnice (5a) a po úpravách dostane

$$\ddot{\xi} + \Omega_r^2 \xi = \frac{g\varphi_0^2}{4} (1 - 3 \cos(2\omega_\varphi t)). \quad (7)$$

Pro $2\omega_\varphi \neq \Omega_r$ může řešení (pro $\dot{\xi}(0) = 0$) hledat ve tvaru

$$\xi = A \cos(\Omega_r t) + B \cos(2\omega_\varphi t) + C;$$

konstanty určí po dosazení do (7) a do počáteční podmínky. Řešení lze upravit na tvar

$$\xi(t) = E \sin(\omega_s t) \sin(\omega_v t) + F \cos(\Omega_r t) + C, \quad (8a)$$

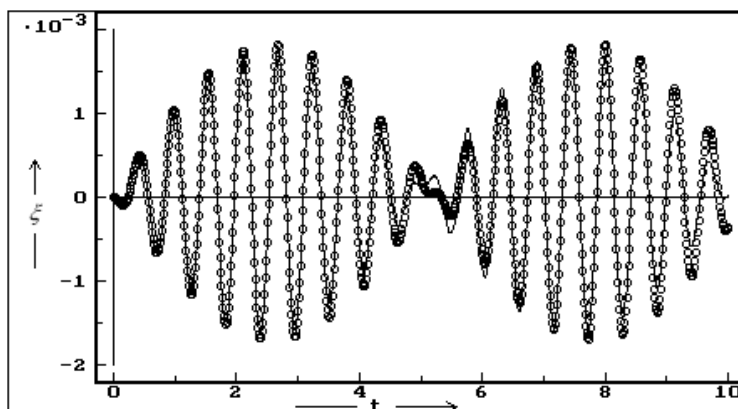
kde

$$\omega_s = \frac{\Omega_r}{2} + \omega_\varphi, \quad \omega_v = \frac{\Omega_r}{2} - \omega_\varphi, \quad (8b)$$

$$E = -\frac{3g\varphi_0^2}{2(\Omega_r^2 - 4\omega_\varphi^2)} = -\frac{3g\varphi_0^2}{8\omega_s\omega_v}, \quad C = \frac{g\varphi_0^2}{4\Omega_r^2} \quad \text{a} \quad F = \xi(0) - C. \quad (8c)$$

Porovnání řešení (8) s numerickým řešením přesných rovnic (rovnic (3) z [1]) ukáže dobrou shodu. Obr. 2 ukazuje srovnání obou řešení pro kyvadlo s parametry převzatými z článku [1]: $l = 0,28$ m, $k = 12,5$ N/m; tíhové zrychlení bereme $g = 9,81$ m/s². Jsou porovnána řešení pro případ $m = 0,09$ kg, tedy pro $2\omega_\varphi/\Omega_r \doteq 0,9$, a pro amplitudu kyvů $\varphi_0 = 0,05785$ rad (opět převzatou z [1]). Počáteční podmínku bereme $\xi(0) = 0$. Numerické řešení využívalo Rungeho-Kuttovu metodu 4. řádu s automatickou volbou kroku (algoritmus uveřejněný v [9] naprogramovaný kdysi do systému Famulus, jenž byl nyní užít k výpočtu). Relativní přesnost řešení byla nastavena na 10^{-9} .

Jak graf ukazuje, řešení (8) v tomto případě vcelku dobře vystihuje řešení přesných rovnic jak co do frekvencí, tak co do amplitudy. Detail grafu, který zde v zájmu stručnosti neuvádíme, by ukázal, že přesnost amplitudy činí asi 4%. Pro $m = 0,06$ kg ($2\omega_\varphi/\Omega_r \doteq 0,75$) je shoda amplitud lepší než 1% a analytické řešení lépe kopíruje průběh numerického i kolem minima rázů. (Toto platí pro φ_0 uvedené výše, velikost chyby samozřejmě závisí i na amplitudě kyvů!) Podobně můžeme porovnávat analytické a numerické řešení i pro další kombinace parametrů a pro různá počáteční protažení pružiny daná hodnotou $\xi(0)$.



Obr. 2. Porovnání numerického řešení přesných rovnic (plná čára) pro pružné kyvadlo s řešením (8) (kroužky) pro kmity buzené kyvy; $2\omega_\varphi/\Omega_r \doteq 0,9$ a $\varphi_0 = 0,05785$.

Z těchto srovnání náš student může vidět, že se v daném případě vyplatilo nechat v rovnici (5a) všechny členy druhého řádu. Autorům článku [1] díky zanedbání jednoho z členů vychází např. amplituda rázů (r'_{m1} , viz (19) v [1], kde za $l_g\omega_\varphi^2$ dosadíme g) o třetinu menší v porovnání s výše odvozenou hodnotou E .

Pozor na rezonanci! (A první malý pokus)

Samozřejmě, že analytické řešení (8) nemůže dobře popsat kmity v blízkosti rezonance. Už ze vztahu (8c) může náš student vidět, že pro $2\omega_\varphi$ blížící se Ω_r je amplituda kmitů E velká. Nebude tedy možno zanedbat pravou stranu rovnice (5b) a kmity

začnou ovlivňovat kývání kyvadla. Například pro $m = 0,11$ kg, tj. $2\omega_\varphi/\Omega_r \doteq 0,97$, je již naše aproximace prakticky nepoužitelná. Tím spíše toto nastane v rezonanci, tedy pro

$$2\omega_\varphi = \Omega_r, \quad (9)$$

kdy řešení rovnice (7) musí obsahovat člen $t \sin(\Omega_r t)$.

Kdy nastane rezonance, můžeme jednoduše zjistit i bez měření period kyvů a kmitů či tuhosti pružiny a hmotnosti závaží. Stačí si všimnout, o kolik se pružina při zatížení závažím protáhne. Z (1) a (3) plyne $l_g - l_0 = mg/k = l_g(\omega_\varphi/\Omega_r)^2$, takže $l_0/l_g = 1 - (\omega_\varphi/\Omega_r)^2$. Po dosazení (9) je jasné, že

$$\text{v rezonanci: } l_g = \frac{4}{3} l_0. \quad (10)$$

Stačí tedy na pružinu přidávat závaží tak dlouho, až se protáhne o třetinu své délky, a pak už jen ověřit, že kyvy opravdu vybudí kmity o velké amplitudě.



Obr. 3. Pružné kyvadlo — reálný pokus.

Obrázek 3 ukazuje, v jakém uspořádání může student s pružným kyvadlem experimentovat. Zavěsíme-li horní konec pružiny na nit, můžeme prodlužováním a zkracováním niti „ladit“ frekvenci kyvů při nezměněné frekvenci kmitů. Pro konkrétní hodnoty parametrů (jiné, než v článku [1]) byl vztah (10) ověřen s přesností asi 3%.

(Poznamenejme, že pro experiment potřebuje student opravdu pružinu. Pokus nahradit pružinu kloboukovou gumou selhal v důsledku příliš velkého tlumení.)

Dominantní kmity: zjednodušíme rovnici

Jak si poradit s případem, kdy při pohybu pružného kyvadla výrazně dominují kmity? Povzbuzeni předchozím úspěchem (a po vzoru článku [1] a dalších) zanedbáme nyní

naopak vliv kyvů na kmity, tj. místo rovnice (5a) vezmeme první z rovnic (2) a její řešení

$$\xi = \xi_0 \cos(\Omega_r t). \quad (11)$$

Rovnice (5b), tedy

$$\ddot{\varphi} + \frac{2\dot{\xi}}{l_g} \dot{\varphi} + \omega_\varphi^2 \left(1 - \frac{\xi}{l_g}\right) \varphi = 0, \quad (12)$$

pak ovšem vypadá složitěji. Naštěstí si náš student vzpomene, že vhodnou substitucí lze z lineární diferenciální rovnice druhého řádu odstranit člen s první derivací. Může zkusmo zvolit $\varphi(t) = f(t) \cdot \psi(t)$ a hledat funkci $f(t)$, „aby to vyšlo“. Pro f dostane diferenciální rovnici prvního řádu a lehce zjistí, že tou správnou substitucí je

$$\varphi(t) = \exp(-\xi(t)/l_g) \cdot \psi(t). \quad (13)$$

Tentýž postup lze ostatně najít třeba v paragrafu 4.1.8 učebnice [10]. Z rovnice (12) pak vyjde

$$\ddot{\psi} + \omega_\varphi^2 \left(1 - \frac{\xi}{l_g} - \frac{\ddot{\xi}}{g}\right) \psi = 0. \quad (14)$$

(Poznamenejme, že jsme při úpravě vypustili člen $-\ddot{\xi}^2 \psi / l_g^2$. Jde o člen třetího řádu, takže je korektní ho zanedbat.) Ve (14) bychom ještě pro zjednodušení mohli dosadit za $\ddot{\xi}$ z první z rovnic (2). Ať tak či tak, po dosazení explicitního výrazu pro kmity (11) dostaneme nakonec pro ψ rovnici

$$\ddot{\psi} + \omega_\varphi^2 (1 + h \cos(\Omega_r t)) \psi = 0, \quad (15)$$

kde h je konstanta:

$$h = \frac{\xi_0}{l_g} \left(\frac{\Omega_r^2}{\omega_\varphi^2} - 1 \right). \quad (16)$$

Pro dostatečně malou amplitudu kmitů je přitom $|h| \ll 1$.

Rovnice (15) již vypadá jednodušeji, zejména když studentovi poradíme, že vlastně jde o známou Mathieuovu rovnici, s jejímiž řešeními se může seznámit například v příručce [11] či v jiných pramenech.

Malá odbočka ke kartézským souřadnicím

Na Mathieuovu rovnici narazíme v řadě článků věnovaných pružnému kyvadlu. Vychází v nich jako rovnice pro vodorovnou kartézskou souřadnici x . „Je to náhoda?“ může se zeptat náš student. Není. Ve skutečnosti je substituce (13) až na členy třetího řádu (které zanedbáváme) ekvivalentní substituci

$$\varphi(t) = \frac{l_g}{r(t)} \psi(t).$$

(Stačí si uvědomit, že ve (13) lze přepsat $\exp(-\xi/l_g) = 1/\exp(\xi/l_g) \doteq 1/(1 + \xi/l_g) = l_g/(l_g + \xi)$.) Obvyklý obrat $\sin \varphi \doteq \varphi$ již pak ukazuje, že s přesností do druhého řádu je

$$x = l_g \psi.$$

Rovnice (15) je tedy vlastně rovnicí pro x . Poznamenejme, že obdobně jsme mohli upravit již rovnici (14).

Kyvy buzené kmity: parametrická rezonance

Rovnice (15) popisuje malé horizontální kmity kyvadla, jehož délka (tedy jeden z *parametrů* systému) se periodicky mění podle (11). I v tomto případě může dojít k rezonanci — a náš student má skvělou příležitost seznámit se s tzv. *parametrickou rezonancí*.

Nemusí hned začít studovat Mathieuovy funkce. Stačí, aby se podíval do nějaké učebnice, kde se parametrická rezonance probírá, například na § 27 v klasické učebnici [12]. (Není-li k dispozici anglický překlad a studentovi dělá potíže azbuka, může sáhnout po poněkud zjednodušeném výkladu ve slovenském překladu učebnice [13]. Úvod do parametrických kmitů najde i v české učebnici [10] či v diplomové práci [14].)

Připomeňme zde zmíněný učebnicový výklad v poněkud upravené podobě — dejme tomu tak, jak by si vše mohl přepočítat náš student, kdyby se sám s tužkou a papírem chtěl celou věcí „prokousat“.

Rovnici (15) si nejdříve přepíše na tvar

$$\ddot{\psi} + \omega_\varphi^2 (1 + h \cos(2\omega t)) \psi = 0, \quad (17)$$

kde

$$\omega = \Omega_r/2. \quad (18)$$

Inspirován literaturou bude hledat řešení ve tvaru $\psi = e^{st} \cdot g(t)$, kde $g(t)$ je funkce obsahující členy $\sin(\omega t)$ a $\cos(\omega t)$ a s je neznámá konstanta. Pracovat s komplexní exponenciálou je však pohodlnější než se siny a kosiny. Proto náš student napíše hledané řešení ve tvaru

$$\psi(t) = e^{st} (A_1 e^{i\omega t} + A_{-1} e^{-i\omega t}), \quad (19)$$

kde A_1 a A_{-1} jsou zatím neznámé konstanty. V rovnici (17) zapíše

$$\cos(2\omega t) = \frac{1}{2} (e^{2i\omega t} + e^{-2i\omega t}),$$

dosadí do ní (19) a sleduje, co mu po úpravách vyjde. Okamžitě vidí, že (19) *nemůže* být přesným řešením rovnice (17). Dostává totiž členy obsahující frekvence 3ω , a ty se mu s ničím nezruší. Landau s Lifšicem mu v [12] v podstatě radí, aby tyto členy ignoroval. Náš student sice možná zpočátku pořádně nepochopí, proč (to se u Landaua

a Liřšice občas stává), ale rozhodne se tedy tyto řleny opravdu zanedbat. Z rovnice (17) pak dostane

$$e^{i\omega t} \left(\left((s + i\omega)^2 + \omega_\varphi^2 \right) A_1 + \omega_\varphi^2 \frac{h}{2} A_{-1} \right) + e^{-i\omega t} \left(\left((s - i\omega)^2 + \omega_\varphi^2 \right) A_{-1} + \omega_\varphi^2 \frac{h}{2} A_1 \right) = 0.$$

Dále již jde o uřebnicový postup. Je jasné, ře oba řleny v kulatých zřavorkách se musí rovnat nule,

$$\begin{aligned} \left((s + i\omega)^2 + \omega_\varphi^2 \right) A_1 + \omega_\varphi^2 \frac{h}{2} A_{-1} &= 0, \\ \omega_\varphi^2 \frac{h}{2} A_1 + \left((s - i\omega)^2 + \omega_\varphi^2 \right) A_{-1} &= 0, \end{aligned} \tag{20}$$

a aby koeficienty A_1 a A_{-1} mohly být nenulové (tedy aby nezbylo jen jedině triviální řešení $A_1 = A_{-1} = 0$), musí být determinant soustavy (20) roven nule:

$$\left((s + i\omega)^2 + \omega_\varphi^2 \right) \left((s - i\omega)^2 + \omega_\varphi^2 \right) - \left(\omega_\varphi^2 \frac{h}{2} \right)^2 = 0.$$

Tuto podmínku již student lehce upraví na kvadratickou rovnici pro s^2 a jejím řešením dostane

$$s^2 = \omega_\varphi^2 \left(2 \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_\varphi} \right)^2 + \frac{h^2}{16}} - 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_\varphi} \right)^2 \right). \tag{21}$$

(Druhý kořen dané kvadratické rovnice vede ke řlenům s vyššími frekvencemi a nebudeme ho uvažovat.)

Teď je student v typické situaci: Cosi spořetl — ale jaký to má význam? Můře mu pomoci otázka:

Kdy je systém mimo rezonanci?

Rychlý pohled na tvar řešení (19) připomene, kdy rezonance *nenastává*. Je to tehdy, když s je ryze imaginární, tedy když

$$s^2 < 0. \tag{22}$$

Kombinace (21) a (22) pak vede po malých úpravách k podmínce

$$|h| < 2 \left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_\varphi} \right)^2 \right| = 2 \left| 1 - \frac{\Omega_r^2}{4\omega_\varphi^2} \right|. \tag{23}$$

Pro porovnání s řlánkem [1] je vhodné dotáhnout v tomto řpřpadě do konce analytický tvar našeho přibližného řešení. Oznařme-li frekvenci rázů

$$\omega_v = \sqrt{-s^2}, \tag{24}$$

kde s^2 je dáno (21) a

$$\omega_1 = \omega - \omega_v = \frac{1}{2}\Omega_r - \omega_v, \quad \omega_2 = \omega + \omega_v = \frac{1}{2}\Omega_r + \omega_v, \quad (25)$$

vyjde po výpočtu koeficientů A_1 a A_{-1} a dosazení do (19) řešení (odpovídající počáteční podmínce $\dot{\psi}(0) = 0$) ve tvaru

$$\psi(t) = B(\cos(\omega_1 t) + C \cos(\omega_2 t)), \quad (26)$$

kde

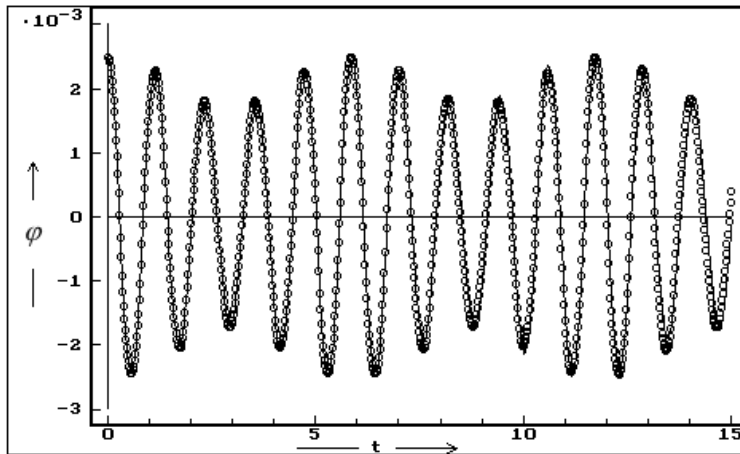
$$C = \frac{\frac{1}{2}\omega_\varphi^2 h}{(\omega + \omega_v)^2 - \omega_\varphi^2}, \quad B = \frac{\psi(0)}{1 + C}. \quad (27)$$

Poznamenejme pro úplnost, že z rovnice (20), do níž dosadíme $s = i\omega$, vyjde jednoznačný vztah mezi koeficienty A_1 a A_{-1} . Pokud student zaváhá, kde má k dispozici další koeficient, aby mohl splnit dvě nezávislé počáteční podmínky (pro počáteční výchylku a rychlost), připomeneme mu, že rovnice (21) má dvě řešení, takže je třeba uvažovat i řešení (19) s parametrem $s = -i\omega$. Místo (19) tedy musíme brát obecné řešení

$$\psi(t) = e^{i\omega_v t} (A_1 e^{i\omega t} + A_{-1} e^{-i\omega t}) + e^{-i\omega_v t} (\tilde{A}_1 e^{i\omega t} + \tilde{A}_{-1} e^{-i\omega t}).$$

Rovnice (20) opět (po dosazení $s = -i\omega$) určuje jednoznačný vztah mezi \tilde{A}_1 a \tilde{A}_{-1} , takže pro splnění počátečních podmínek máme dva „volné“ koeficienty A_1 a \tilde{A}_1 . Tento postup byl uplatněn při odvození řešení (26) uvedeného výše.

Počáteční hodnotu ψ určíme jako $\psi(0) = \exp(\xi_0/l_g) \cdot \varphi(0)$ a výslednou časovou závislost úhlu φ nakonec ze substituce (13).



Obr. 4. Porovnání numerického řešení přesných rovnic (plná čára) pro pružné kyvadlo s řešením (26) (kroužky) pro kmity parametricky buzené kyvy. (Parametry systému $2\omega_\varphi/\Omega_r \doteq 0,9$ a $h \doteq 0,23$ jsou mimo oblast rezonance.)

Porovnání našeho analytického řešení s numerickým řešením přesných rovnic pro pružné kyvadlo ukazuje obrázek 4. Vidíme, že řešení má známý charakter odpovídající skládání kmitů dvou blízkých frekvencí, analytické řešení (26) přitom dobře vystihuje jak frekvenci rázů danou ω_v , tak „průměrnou amplitudu“ i amplitudu rázů, jež jsou určeny konstantami B a C .

I v tomto případě jde o kyvadlo se základními parametry stejnými, jako užili autoři článku [1]; hmotnost byla zvolena $m = 0,09$ kg a amplituda kmitů $\xi_0 = 0,02$ m. V daném případě je $l_g \doteq 0,35$ m, takže $\xi_0/l_g \doteq 0,06$ a $h \doteq 0,23$. Počáteční amplitudu kyvů samozřejmě nemůžeme zvolit rovnou nule; v našem případě je $\varphi_0 = 0,025$. Pro tyto parametry vychází, že frekvence rázů určená vztahy (24) a (21) souhlasí s numerickým řešením s přesností asi 2,5 %, amplituda s přesností zhruba jedno procento. (Podobně je tomu pro $m = 0,15$ kg.) Se zvyšující se amplitudou kmitů se ovšem shoda přibližného analytického řešení s numerickým rychle zhoršuje; pro $\xi_0 = 0,04$ m, tedy $h \doteq 0,46$, již chyba činí desítky procent.

Malá odbočka pro zpřesnění: zanedbání vyšších frekvencí, Floquetův teorém a další souvislosti

Již jsme konstatovali, že výraz (19) není přesným řešením rovnice (17). Jak to, že ho tedy můžeme použít?

Správně bychom měli řešení rovnice (17) hledat ve tvaru

$$\psi(t) = e^{st} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\omega t}$$

a určit hodnoty všech koeficientů A_k . (Jak uvidíme dále, pro daný problém stačí brát liché hodnoty k , tj. brát $A_{2n} = 0$.) Ze vztahů mezi koeficienty, které vyjdou postupem analogickým jako výše, však můžeme odhadnout, že již koeficienty A_3 , A_{-3} jsou výrazně menší než A_1 a A_{-1} . A to nejen pro $|h| \ll 1$: i pro $h = 0,5$ (a pokud ω není výrazně nižší než ω_φ) nepřesahuje zřejmě poměr A_3/A_1 několik setin. Amplitudy kmitů ještě vyšších frekvencí klesají v podobném poměru. Je tedy opravdu rozumné ponechat v sumě jen kmitu s frekvencí ω .

Matematicky založený student by mohl pátrat po dalších souvislostech a narazit v literatuře na zmínku, že s daným postupem řešení rovnice (17) souvisí *Floquetův teorém*. (Viz např. § 20.3 v [11].) Z něj plyne, že řešení rovnice $\ddot{x} + \tilde{\omega}^2(t)x = 0$, v níž $\tilde{\omega}(t)$ je periodická funkce s periodou T , lze psát ve tvaru $x(t) = e^{i\nu t} P(t)$, kde $P(t)$ je periodická funkce se stejnou periodou T . (Tento fakt je odvozován i v kapitolách o parametrické rezonanci v učebnicích [10, 12–13], pouze se tam nemluví o Floquetově teorému.) Necháme zde stranou existenci dvou nezávislých řešení a další detaily, ale všimneme si jedné věci, která by studenta mohla zarazit.

Ve Floquetově teorému se mluví o tom, že $P(t)$ a $\tilde{\omega}(t)$ mají stejnou periodu. V rovnici (17) perioda funkce $\tilde{\omega}(t) = \omega_\varphi \sqrt{1 + h \cos(2\omega t)}$ samozřejmě odpovídá úhlové

frekvenci 2ω . Proč jsme potom v řešení (19) brali v závorce za e^{st} členy $e^{i\omega t}$ a $e^{-i\omega t}$, a nikoli $e^{2i\omega t}$ a $e^{-2i\omega t}$? Není to v rozporu s Floquetovým teorémem?

Studenta ale můžeme uklidnit. Další faktor $e^{i\omega t}$ se do řešení dostane právě z členu $e^{i\nu t}$ před $P(t)$. (Je $i\nu = s + i\omega$.) Právě proto se v sumě v řešení (17) vyskytují jen členy s lichými indexy k .

Pro upřesnění snad dodejme, že naše řešení se netýká případu, kdy by Ω_r bylo přibližně rovno ω_φ nebo bylo nižší. I v tomto případě by řešení rovnice (17) mohlo vykazovat parametrickou rezonanci (např. právě pro případ $\Omega_r = \omega_\varphi$), oblast rezonance je však mnohem užší a ve skutečném případě pružného kyvadla se tento případ zřejmě nerealizuje.

Rezonance v blízkosti $\Omega_r = 2\omega_\varphi$ — jaká je hranice rezonanční oblasti?

Již jsme viděli (viz (9) a (23)), že pro $\Omega_r = 2\omega_\varphi$ nastává rezonance, kdy kyvy výrazně ovlivňují kmitý a naopak. Protože nejde o systém buzený zvnějšku, mluví se v tomto případě o *autoparametrické rezonanci*.

Podívejme se blíže, jak moc můžeme „rozladit“ pružné kyvadlo, aby ještě nastala rezonance. Budeme vyšetřovat, jak velký může být relativní rozdíl frekvencí

$$\varepsilon = \frac{\Omega_r - 2\omega_\varphi}{\omega_\varphi}, \quad (28)$$

aby kmitý vybudily výrazně velkou amplitudu kyvů. Protože pružné kyvadlo je nelineární systém, závisí možné rozladění na amplitudě kmitů.

V článku [1] uvádějí jeho autoři, že mezní rozladění je přibližně úměrné *druhé mocnině* relativní amplitudy kmitů. (Viz vzorec (33) a obr. 8 v [1].) Ovšem, jak sami říkají, docházejí k tomuto výsledku „po dosti hrubých aproximacích“. Jak ukážeme dále, z rozboru parametrické rezonance uvedeného výše vyplývá něco jiného — a sice že v blízkosti rezonance je závislost mezi amplitudou kmitů a mezním rozladěním *lineární*.

Pojďme se proto na problém hranice rezonanční oblasti podívat blíže — opět tak, jak bychom k němu mohli přistupovat s naším studentem. Podmínku (23) nyní budeme brát s obráceným znaménkem nerovnosti. (Nyní jde o to, kdy rezonance nastane. Potřebujeme, aby s bylo reálné, aby v řešení (19) byl exponenciálně rostoucí člen.) Pro $\Omega_r = 2\omega_\varphi$ můžeme podmínku upravit na

$$h > \frac{|4\omega_\varphi^2 - \Omega_r^2|}{2\omega_\varphi^2} = \frac{(2\omega_\varphi + \Omega_r)|2\omega_\varphi - \Omega_r|}{2\omega_\varphi^2} \doteq 2 \frac{|2\omega_\varphi - \Omega_r|}{\omega_\varphi}.$$

(Správně bychom zde měli psát $|h|$, ale dále již uvažujeme jen $h > 0$.) Z toho vychází, že rezonance nastane při relativním rozladění

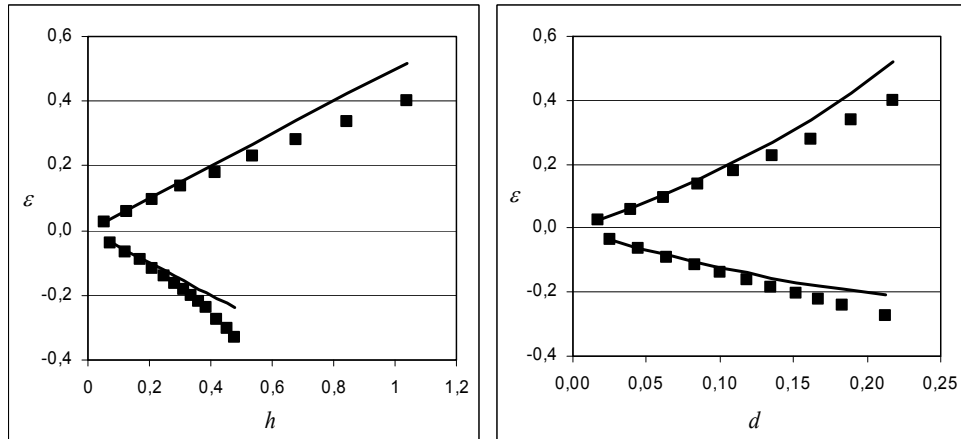
$$|\varepsilon| < \frac{h}{2}. \quad (29)$$

Poznamenejme, že stejná podmínka je odvozena i v učebnici [12] a k podmínce, kterou z ní dostaneme po dosazení (16), tedy

$$|\varepsilon| < \frac{\xi_0}{2l_g} \left(\frac{\Omega_r^2}{\omega_\varphi^2} - 1 \right),$$

dospěli, byť zcela jiným způsobem, také autoři článku [4].

Konečným soudcem je ale samozřejmě experiment. V našem případě zejména numerický. Pro řadu hodnot hmotnosti závaží m v rozmezí 0,115 až 0,075 kg a 0,125 až 0,200 kg byly pro numericky řešené přesné rovnice pružného kyvadla s velmi malou počáteční amplitudou kyvu měněny hodnoty relativní amplitudy kmitů $d = \xi_0/l_g$ tak, aby byla nalezena hodnota, při níž kyvy začnou exponenciálně růst. Výsledky — možné rozladění frekvencí v závislosti na h , resp. d , v jejichž rámci dochází k rezonanci — a jejich porovnání s teoretickým odhadem (29) ukazuje obrázek 5. Horní „větvi“ grafů (tedy rozladění $\varepsilon > 0$) odpovídají hodnoty hmotnosti m menší než 0,12 kg (tedy Ω_r vyšší než rezonanční frekvence), dolní větvi hmotnosti vyšší.



Obr. 5. Meze rezonanční oblasti. Srovnání odhadu možného rozladění podle (29) (plná čára) s mezemi určenými numerickými experimenty (čtverečky).

Je vidět, že lineární závislost meze rozladění ε na h , tedy vztah (29), dobře vystihuje chování pružného kyvadla až do relativních amplitud kmitů d asi 0,1 až 0,15. Pro vyšší rozladění chyba roste — ale další numerické experimenty nás přesvědčí, že to je dáno tím, že rovnice, s nimiž pracujeme, jsou jen aproximací přesných rovnic. Odvozovat přesnější závislost meze rozladění pro vyšší hodnoty d z rovnice (12) tedy nemá smysl; výsledky by neodpovídaly skutečnému chování pružného kyvadla.

Poznamenejme, že relativní amplituda kmitů u reálného kyvadla nemůže být větší než určitá mez — v blízkosti rezonance musí být $d < 0,25$. Jinak by se pružina při zkracování „krčila“ pod svou délku v neprotaženém stavu. (Viz výše vztah (10), z něhož je jasné, že v rezonanci je pružina protažena právě o $l_g/4$.)

Závislost mezi amplitudou kmitů a rozladěním kyvadla na hranici parametrické rezonance lze ověřit i reálným experimentem. V našem případě byla v uspořádání

podle obr. 3 měřena velikost kmitů, pro které již pružné kyvadlo vykazovalo rezonanci při hodnotách rozladění ε rovných 0,1, 0,2 a 0,3. Amplitudy kmitů odpovídaly vztahu (29) s přesností asi 10 %.

Co už udělali jiní — aneb všechno je hotovo, je hotovo . . . ?

Nejspíše již mnohem dříve než v této fázi bychom zřejmě našeho studenta vybědli k tomu, aby se podíval, co je o problému pružného kyvadla napsáno i v jiné než učebnicové literatuře. Pojdme se proto na práce jiných autorů stručně podívat alespoň nyní.

Původní článek Witta a Gorelika z roku 1933, citovaný v [1], student asi nesežene. Ale má šanci sehnat řadu dalších článků, zejména z časopisu *American Journal of Physics*, které svědčí o tom, že problém dosud zajímá odborníky zabývající se fyzikálním vzděláváním.

M. G. Olsson [2] diskutoval parametrickou rezonanci v systému. Konstatoval, že nejsou možné jiné rezonance, než je případ $\Omega_r = 2\omega_\varphi$, a popsal dva stabilní módy pohybu pružného kyvadla. M. G. Rusbridge [3] ukázal mimo jiné výsledky skutečných experimentů (trajektorii závaží, na němž byla připevněna žárovka, zaznamenával fotoaparát s dlouho otevřenou závěrkou) a věnoval se problému vývoje amplitud a fází kyvů a kmitů. H. M. Lai [5] upozornil na nekorektní předpoklady v Rusbridgeově odvození, nezávisle řešil otázku vývoje amplitud a odvodil periodu, s níž se energie „přelévá“ mezi kyvy a kmity. Všechny tyto práce uvažovaly přesnou rezonanci $\Omega_r = 2\omega_\varphi$.

Velmi podrobně řešili vývoj kmitů a kyvů pružného kyvadla Breitenberg a Mueller [4]. Vyšli přitom z hamiltonovské formulace problému a vývoj amplitud a fází kyvů a kmitů počítali metodou pomalých fluktuací. Řešili též případ stability kmitů mimo přesnou rezonanci. Tento článek obsahuje také jednu z nejrozsáhlejších bibliografií k problému pružného kyvadla (na padesát odkazů).

Problém, zda existují i jiné rezonance než v $\Omega_r = 2\omega_\varphi$ (a okolí), diskutovali Aničín, Davidovič a Babovič [6]. Využívali přitom diagram stability Mathieuovy rovnice; jejich odpověď je záporná. V článku [7] pak titíž autoři našli meze, v nichž se pružné kyvadlo může pohybovat. Bifurkační diagram pro nejrůznější, i velmi „divoké“ pohyby pružného kyvadla (zahrnující případy, kdy se pružina může zkracovat, kyvadlo se může otáčet dokola kolem bodu závěsu atd.) konstruoval S. V. Kuzněcov [8].

Všechny uvedené články řešily problém pružného kyvadla kývajícího *v rovině*. P. Lynch [15] (citovaný i v [1]) řeší problém *třírozměrného* pružného kyvadla. Na webových stránkách [16] navíc prezentuje aplet, který simuluje řadu případů pohybu tohoto kyvadla. Stojí za vyzkoušení, jsou to i hezké a pro studenty jistě atraktivní obrázky. Třírozměrný případ však není jediným směrem, kam lze řešení problému pružného kyvadla rozvíjet. J. Christensen [17] například diskutuje vliv hmotnosti pružiny.

Je také dobré si uvědomit, že pružné kyvadlo může být opravdu i úlohou do praktik v úvodu vysokoškolského studia. Například Reed College prezentuje na webu

17stránkový návod [18] k úloze (resp. k „otevřenému projektu“) týkající se zkoumání pružného kyvadla.

Závěr

I přes množství existujících prací bychom v problému pružného kyvadla mohli stále najít otevřené otázky. Navzdory tvrzení, že neexistují jiné rezonance než $\Omega_r = 2\omega_\varphi$, se lze například setkat s článkem [19], jehož autoři testují metody numerické integrace na rezonancích vyššího řádu pro pružné kyvadlo. Jen málo byl zřejmě studován vliv útlumu, tedy odporu prostředí, a právě tak vliv hmotnosti pružiny. Navíc bývá problém pružného kyvadla často studován jen v přiblížení rovnic (5), resp. (6). Jak jsme viděli v případě mezi rezonanční oblasti, pro vyšší amplitudy kmitů přitom tento popis samozřejmě přestává vyhovovat.

Výzvou pro ty z nás, kdo se zabýváme fyzikálním vzděláváním, pak může být otázka, zda, kdy a jak daný problém předložit studentům, jak jej s nimi analyzovat co nejjednodušeji, ale přitom bez přílišného zkreslení, a co vše lze na něm naučit a vysvětlit. Pokud vás tento článek v tomto směru alespoň trochu zaujal či inspiroval, splnil svůj účel.

L i t e r a t u r a

- [1] HAVRÁNEK, A., ČERTÍK, O.: *Pružné kyvadlo*. PMFA 51 (2006), 198–216.
- [2] OLSSON, M. G.: *Why does a mass on a spring sometimes misbehave?* Am. J. Phys 44 (1976), No. 12, 1211–1212.
- [3] RUSBRIDGE, M. G.: *Motion of the sprung pendulum*. Am. J. Phys. 48 (1980), No. 2, 146–151.
- [4] BREITENBERGER, E., MUELLER R. D.: *The elastic pendulum: A nonlinear paradigm*. J. Math. Phys. 22 (1981), No. 6, 1196–1210.
- [5] LAI, H. M.: *On the recurrence phenomenon of a resonant spring pendulum*. Am. J. Phys. 52 (1984), No. 3, 219–223.
- [6] ANIČIN, B. A., DAVIDOVIĆ, D. M., BABOVIĆ, V. M.: *On the linear theory of the elastic pendulum*. Eur. J. Phys. 14 (1993), 132–135.
- [7] DAVIDOVIĆ, D. M., ANIČIN, B. A., BABOVIĆ, V. M.: *The libration limits of the elastic pendulum*. Am. J. Phys. 64 (1996), No. 3, 338–342.
- [8] KUZNETSOV, S. V.: *The motion of the elastic pendulum*. Regular and Chaotic Dynamics 4 (1999), No. 3, 3–12.
- [9] PRESS, W. H. et. al.: *Numerical Recipes in FORTRAN. The Art of Scientific Computing*. Cambridge Univ. Press, Cambridge 1992.
- [10] BRDIČKA, M., HLADÍK, A.: *Teoretická mechanika*. Academia, Praha 1987.
- [11] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, A.: *Handbook of Mathematical Functions*. Dower Publications, N. Y. 1970.
- [12] LANDAU, L. D., LIFŠIC, E. M.: *Mechanika*. Nauka, Moskva 1973.
- [13] LANDAU, L. D., LIFŠIC, E. M.: *Úvod do teoretické fyziky 1*. Alfa, Bratislava 1980.
- [14] HLUŠÍ, S.: *Parametrická rezonance aneb Fyzika na houpačce*. Diplomová práce. MFF UK, Praha 2000.
- [15] LYNCH P.: *Resonant motion of the three-dimensional elastic pendulum*. Int. J. Nonlin. Mech. 37 (2002), 345–367.

- [16] LYNCH, P.: *The swinging spring*. Webové stránky dostupné na adrese http://www.maths.tcd.ie/~plynch/SwingingSpring/SS_Home_Page.html [cit. 31. 5. 2006].
- [17] CHRISTENSEN, J.: *An improved calculation of the mass for the resonant spring pendulum*. Am. J. Phys. 72 (2004), No. 6, 818–828.
- [18] *Properties of the nonlinear elastic pendulum*. Dostupné na webu na adrese <http://academic.reed.edu/physics/courses/phys100/Lab%20Manuals/Nonlinear%20Pendulum/nonlinear.pdf> [cit. 31. 5. 2006].
Patří do projektů kurzu General Physics na Reed College — viz <http://academic.reed.edu/physics/courses/phys100/fallsemester.html> [cit. 31. 5. 2006].
- [19] TUWANKOTTA, J. M., QUISPEL, G. R. W.: *Geometric numerical integration applied to the elastic pendulum at higher-order resonance*. J. Comp. Appl. Math. 154 (2003), 229–242.

František Adam Petřina (1799–1855),

první český profesor fyziky na pražské univerzitě

Jiří Jindra

Petřinův život [1, 2]

Nedávno uplynulo 150 let od úmrtí Františka Adama Petřiny, významného fyzika pravého českého původu. V první polovině 19. století se na pražské univerzitě vyučovaly předměty převážně v němčině, učiteli byli povětšinou čeští Němci, česká inteligence a české názvosloví se teprve formovaly. Na filosofické fakultě působilo v uvedené době nemnoho profesorů, z nichž jen někteří dobře znali česky. Byli to povětšinou profesori humanitního zaměření. Mezi přírodovědci jich bylo poměrně málo, lze uvést profesory J. S. Janderu, J. S. Presla, J. B. Presla a některé další. Mezi fyziky na univerzitě nebyl dlouho žádný zástupce českého národa, dokud se neobjevil ve třicátých letech F. A. Petřina. O jeho životě a díle není mnoho literárních odkazů, jeho činnost lze vysledovat z nekrologů [1, 2], jeho 37 publikací (viz příloha), které uveřejnil v letech 1839–1856, ze seznamu přednášek z let 1845–1855, které měl na filosofické fakultě [3], a seznamu vyučujících na pražské Karlo-Ferdinandově univerzitě z let 1832–1855 [4]. Osobní listy

RNDr. JIŘÍ JINDRA, CSc. (1938), Ústav pro soudobé dějiny AV ČR, Vlašská 9, 118 40 Praha 1, e-mail: jindra@usd.cas.cz