Ještě ke geosynchronní Věži

RNDr. LEOŠ DVOŘÁK, CSc., MFF UK PRAHA

V článku [1] jsme se seznámili s tím, jak lze pomocí „kosmického výtahu" (viz [2]) dostávat tělesa na oběžnou dráhu kolem Země bez použití raketových motorů. A to dokonce zcela zadarmo, nepočítáme-li náklady na stavbu Věže: Jak jsme v závěru článku zjistili, celková práce vykonaná motory výtahu při přemístění tělesa z povrchu Země na vrchol Věže je rovna nule. Nedořešenou jsme nechali pouze „maličkost": Odkud se vzala energie, již přitom těleso získá?

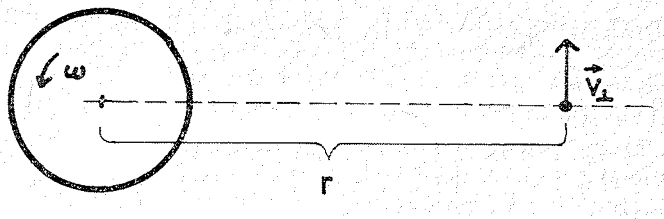
Věříme, že čtenář na tuto hádanku nalezl odpověď — alespoň kvalitativní. Není však nezajímavé rozebrat celou situaci podrobněji a samozřejmě kvantitativně.

Kvalitativní řešení hádanky

Podívejme se blíže na situaci z hlediska inerciálního systému (v němž je střed Země v klidu). Rychlost $v_\perp$, kterou těleso má ve směru kolmém na Věž (viz obr. 1), se mění se vzdáleností r od středu Země:

$$v_\perp = \omega_Z r \,, \tag{1}$$

kde ω_Z je úhlová rychlost otáčení Země. (Pozn.: Pro další rozbor bude výhodné kreslit na obrázcích Věž vodorovně.)



Obr. 1

Obr. 1. Pohyb tělesa momentálně stojícího ve Věži z hlediska inerciálního systému.

Při vytahování tělesa ve Věži $v_\perp$ roste; zřejmě tedy musí ve směru kolmém na Věž působit na těleso síla (označme ji $F_\perp$), která tento růst způsobí. Touto silou musí na těleso působit sama Věž. Nikoli motory, které těleso pomocí lana zdvíhají (síla, jíž motor působí, má radiální směr), ale sama konstrukce Věže. Právě práce této síly dodává tělesu potřebnou energii. A odkud se bere síla $F_\perp$? Představíme-li si pro jednoduchost Věž jako tuhou tyč „zapíchnutou" do Země, je odpověď nasnadě: Věží otáčí zeměkoule, která tedy působí na Věž i potřebnou silou, resp. momentem síly — a dodává potřebnou energii. Odpověď na hádanku z článku [1] tedy zní: energie nákladu při jeho vytažení stoupne na úkor (kinetické) energie rotace Země.

Kvantitativní rozbor (varování před přílišným zjednodušením)

A nyní slíbený podrobnější rozbor. Určeme nejprve sílu $F_\perp$, jíž Věž působí na těleso o hmotnosti m, které v ní (v radiálním směru) stoupá rychlostí v_r.

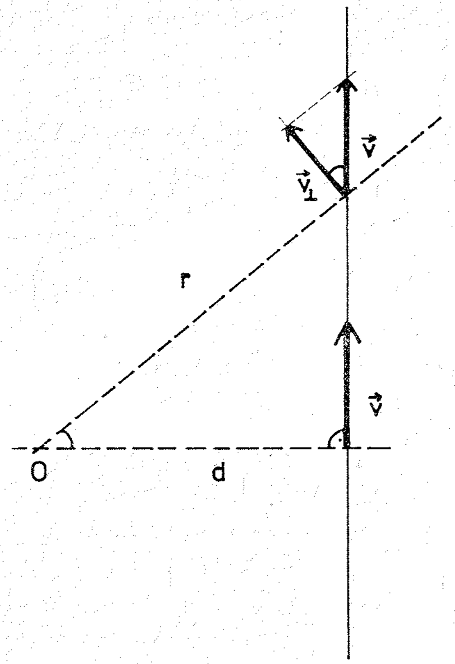
Síla se rovná hmotnosti násobené zrychlením. Ale pozor! Nesmíme se dát strhnout předchozími přímočarými (ale ve skutečnosti poněkud vágními) kvalitativními úvahami k tomu, abychom rozdíl rychlostí $v_\perp$ v časech např. t a $t + \triangle t$ dělený přírůstkem času $\triangle t$ prohlásili za zrychlení ve směru kolmém na Věž a z něj vypočetli sílu. Šlo by o chybnou úvahu, jak ukazuje případ, kdy na těleso nepůsobí vůbec žádná síla (a tedy i $F_\perp = 0$).

Kdyby byla úvaha z předchozího odstavce správná, měla by podle ní v tomto případě rychlost $v_\perp$ zůstávat konstantní. Ovšem těleso, na něž nepůsobí žádná síla, se pohybuje rovnoměrně přímočaře (viz. obr. 2). Rychlost tělesa označme $\mathbf{v}$ a její velikost v $(= |\mathbf{v}|)$. Z podobnosti trojúhelníků na obr. 2. vidíme, že průměr $v_\perp$ rychlosti tělesa do směru kolmého na radiální splňuje vztah $v_\perp / v = d / r$. Platí tedy

$$v_\perp \, . \, r = v \, . \, d = \text{const.} \, ,$$

čili při pohybu tělesa, na něž nepůsobí vnější síly, se zachovává veličina $v_\perp \, . \, r$ (nikoli $v_\perp$); zachovává se tedy i veličina

$$L = r \, . \, m v_\perp \, , \tag{2}$$



Obr. 2

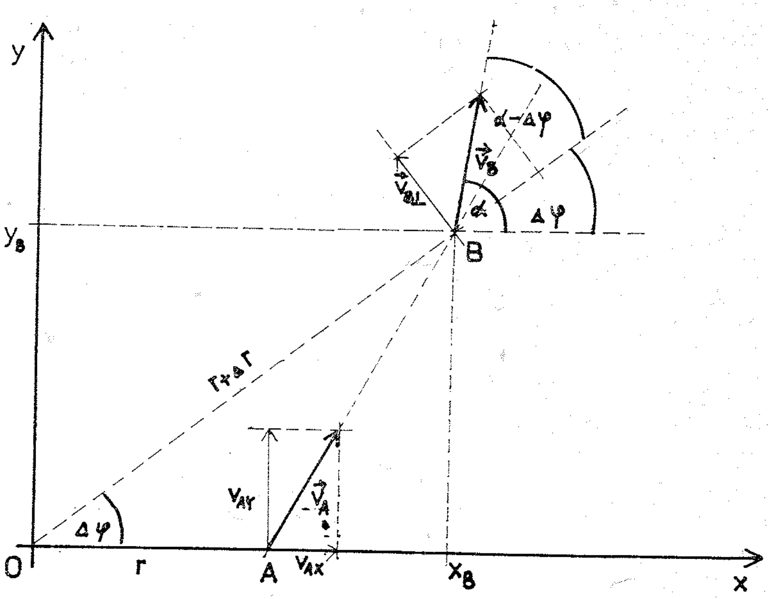
Obr. 2. Odvození složky rychlosti $v_\perp$ tělesa, na něž nepůsobí žádná síla.

kterou nazýváme *momentem hybnosti* daného tělesa — uvažovaného zde jako hmotný bod — vzhledem k danému bodu O, který je v klidu ve zvoleném inerciálním systému.

Přesněji řečeno, (2) je *složka* momentu hybnosti do směru kolmého na rovinu, v níž se děje pohyb. Moment hybnosti je totiž vektor. V uvažovaném problému se však směr tohoto vektoru nemění — místo abychom mluvili o „složce vektoru momentu hybnosti do daného směru", budeme proto v našem rozboru mluvit většinou prostě o „momentu hybnosti" a označovat tuto složku symbolem L (bez šipky a bez indexu označujícího složku).

(Pozn.: Obecně používáme v celém článku často symbol veličiny bez šipky pro označení složky příslušného vektoru. Ze souvislosti je vždy zřejmé, o složku do kterého směru jde: např. $v_\perp$ je složka rychlosti do směru kolmého na radiální apod.)

Z předchozího příkladu je zřejmé, proč je výše uvedená (přespříliš zjednodušená) úvaha chybná — směr kolmý na Věž není v inerciálním systému pevný, ale stále se mění. Při odvozování F_T to musíme vzít v úvahu.



Obr. 3. Odvození složky rychlosti $v_\perp$ tělesa, na něž působí síla.

Pokračování rozboru: popis pohybu tělesa

Převážná část odvození $F_\perp$ bude čistě kinematická. Uvažujme malé těleso (resp. hmotný bod) pohybující se v rovině $x\,y$. (Osy x a y jsou osami inerciálního systému, jehož počátek je ve středu Země.) V čase t nechť je těleso v bodě A na ose x (viz obr. 3) ve vzdálenosti r od počátku O. Rychlost tělesa $\mathbf{v}_A$ v tomto místě má složky v_{Ax}, v_{Ay} (je tedy $\mathbf{v}_A = (v_{Ax}, v_{Ay})$). Složka rychlosti kolmá na spojnici bodu A s počátkem O je zřejmě $v_{A\perp} = v_{Ay}$. Za malý časový interval $\triangle t$ se těleso posune do bodu B. (Pozn.: Pro přehlednost je na obr. 3. posunutí značně přehnáno.) Interval $\triangle t$ zvolíme tak malý, abychom mohli rychlost tělesa mezi body A a B považovat za konstantní. (Zanedbáváme změnu rychlosti danou zrychlením tělesa. Na rozdíl od článku [1] zde již nebudeme jednotlivá zanedbání podrobně odůvodňovat, čtenář si jejich korektnost může promyslet sám.)

Úhlová rychlost ω tělesa vzhledem k počátku O je

$$\omega = \frac{v_{A\perp}}{r} \tag{3}$$

(srovnej s (1); zde ovšem uvažujeme obecný pohyb a ω nemusí být speciálně rovno úhlové rychlosti rotace Země.) Úhel $\triangle\varphi$ (viz obr. 3) je tedy

$$\triangle\varphi = \omega \,.\, \triangle t = \frac{v_{A\perp}}{r} \,.\, \triangle t \,. \tag{4}$$

V dalším výpočtu budeme potřebovat vyjádřit sin $\triangle\varphi$ a cos $\triangle\varphi$. Pro dostatečně malé $\triangle t$ je však $|\triangle\varphi| \ll 1$, a platí proto ($\triangle\varphi$ je vyjádřeno v radiánech!)

$$\sin\triangle\varphi \doteq \triangle\varphi = \frac{v_{A\perp}}{r}\,\triangle t\,; \quad \cos\triangle\varphi \doteq 1\,, \tag{5}$$

jak se může čtenář přesvědčit v matematických tabulkách nebo pomocí kalkulačky.

Je-li v bodě A zrychlení tělesa $\mathbf{a}_A = (a_{Ax}, a_{Ay})$, je zřejmě rychlost tělesa v bodě B

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{a}_A\,\triangle t\,,$$

čili rozepsáno ve složkách

$$v_{Bx} = v_{Ax} + a_{Ax}\,\triangle t\,,$$

$$v_{By} = v_{Ay} + a_{Ay}\,\triangle t\,. \tag{6}$$

Průmět rychlosti $\mathbf{v}_B$ do směru kolmého na radiální je (viz obr. 3)

$$v_{B\perp} = v_B \,.\, \sin(\alpha - \triangle\varphi) = v_B \sin\alpha\cos\triangle\varphi - v_B\cos\alpha\sin\triangle\varphi \doteq$$

$$\doteq v_B \,.\, \sin\alpha \,.\, 1 - v_B \,.\, \cos\alpha \,.\, \triangle\varphi = v_{By} - v_{Bx} \,.\, \triangle\varphi\,,$$

kde jsme využili (5) a toho, že $v_{Bx} = v_B \,.\, \cos\alpha$, $v_{By} = v_B \,.\, \sin\alpha$.
Po dosazení (6) a (4) je

$$v_{B\perp} \doteq v_{Ay} + \alpha_{Ay} \,.\, \triangle t - v_{Ax} \,.\, \frac{v_{A\perp}}{r} \,.\, \triangle t\,. \tag{7}$$

Z obr. 3 je však zřejmé, že

$$(r + \triangle r) \,.\, \cos\triangle\varphi = r + v_{Ax} \,.\, \triangle t\,,$$

z čehož pomocí vztahu (5) dostáváme

$$v_{Ax} \,.\, \triangle t = \triangle r\,. \tag{8}$$

Uvědomíme-li si, že $v_{Ay} = v_{A\perp}$ a podobně pro složku zrychlení kolmou na radiální směr je $a_{A\perp} = a_{AY}$, dostaneme ze (7) a (8)

$$v_{B\perp} = v_{A\perp}\frac{r - \triangle r}{r} + a_{A\perp} \,.\, \triangle t$$

a po vynásobení veličinou $(r + \triangle r)$ (a zanedbání členů $(\triangle r)^2$ a $\triangle r \,.\, \triangle t$) pak konečně

$$(r + \triangle r)\,v_{B\perp} - r \,.\, v_{A\perp} = a_{A\perp} \,.\, r \,.\, \triangle t\,. \tag{9}$$

Pokračování rozboru: dynamické vztahy

Vynásobíme-li získaný vztah hmotností tělesa m, dostaneme již vyjádření pro složku síly kolmou na radiální směr ($F_{A\perp} = ma_{A\perp}$). Uvědomíme-li si navíc, že podle (2) je $L_A = m \,.\, r \,.\, v_{A\perp}$ moment hybnosti tělesa v bodě A (tj. v čase t) a analogicky $L_B = m(r + \triangle r)\, v_{B\perp}$ moment hybnosti tělesa v bodě B (tj. v čase $t + \triangle t$), získá (9) jednoduchý tvar

$$L_B - L_A = r \,.\, F_{A\perp} \,.\, \triangle t \,. \tag{10}$$

Označíme-li $\triangle L = L_B - L_A$ přírůstek momentu hybnosti za čas $\triangle t$, dostaneme z (10) konečný vztah

$$\frac{\triangle L}{\triangle t} = r \,.\, F_\perp = M \,. \tag{11}$$

Zde již nepíšeme index A u síly $F_\perp$, neboť odvození zřejmě platí analogicky pro libovolný bod dráhy tělesa. (Vždy totiž můžeme zvolit soustavu souřadnic tak, aby zadaný bod ležel na ose x.) Součin $r \,.\, F_\perp$ je moment síly (vzhledem k bodu O), značíme jej M, tak jak jsme to již zapsali ve vztahu (11).

Vztah (11) nám říká, že změna momentu hybnosti dělená přírůstkem času se rovná momentu působící síly. Zde jsme jej odvodili pro hmotný bod; ve skutečnosti platí zcela obecně pro libovolné těleso nebo i soustavu těles. Přitom celkový moment hybnosti L takovéto soustavy je součtem momentů hybnosti jednotlivých těles (a moment hybnosti tělesa součtem momentů hybnosti „hmotných bodů", z nichž se těleso skládá). M je pak celkový moment vnějších sil působících na soustavu — vnitřní síly mezi jednotlivými hmotnými body se nemusí uvažovat (pokud mají směr spojnic těchto bodů, což je prakticky vždy splněno). Poznamenejme ještě, že vztah (11) se nazývá *druhá věta impulsová.* (Pozn.: Čtenář znalý derivací jistě již uhodl, že ve vztahu (11) bychom měli ještě provést limitu $\triangle t \to 0$, takže by se na levé straně vztahu objevila derivace $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$. Takovýto vztah by pak platil zcela přesně. Čtenář derivací neznalý by si měl uvědomovat, že nemáme-li se při použití vztahu (11) dopustit větších chyb, musí být $\triangle t$ vždy dostatečně malé.)

Vztahu (11) nyní využijeme pro výpočet síly působící na těleso stoupající ve Věži rychlostí v_r. Úhlová rychlost ω takovéhoto tělesa je konstantní (rovna úhlové rychlosti otáčení Země ω_Z) a $v_\perp = r \,.\, \omega_Z$. Moment hybnosti je tedy (viz 2))

$$L = m \,.\, \omega_Z \,.\, r^2 \tag{12}$$

a jeho přírůstek $\triangle L$ při změně radiální souřadnice z r na $r + \triangle r$, kde $\triangle r = v_r \,.\, \triangle t$, je

$$\triangle L = m\omega_Z\,(r + \triangle r)^2 - m\omega_Z r^2 \doteq 2m\omega_Z r \,.\, \triangle r = 2m\omega_Z r \,.\, v_r \,.\, \triangle t \,.$$

Dosazením do (11) pak (po zkrácení r) dostáváme

$$F_\perp = 2m\omega_Z v_r \,. \tag{13}$$

Touto silou (působící kolmo na radiální směr ve směru rotace) je nutno těleso urychlovat. V soustavě souřadnic otáčející se spolu se Zemí (v níž je Věž nehybná) je to tedy síla, kterou musíme při stoupání na těleso působit („z boku"), aby jeho dráha „nevybočila" z Věže. Situace vypadá tak, jako bychom silou $T_\perp$ museli působit proti nějaké síle F_C (stejně velké jako $T_\perp$, ale opačného směru), která se snaží těleso z jeho dráhy vychýlit. Tato „zdánlivá" (dnes se říká „setrvačná") síla projevující se v rotující soustavě souřadnic při pohybu tělesa, se nazývá *Coriolisova síla.* Zde jsme ji odvodili jen pro speciální případ tělesa pohybujícího se v rotující soustavě v radiálním směru; analogicky by ji však bylo možno odvodit pro obecný případ.

Dokončení rozboru: práce síly $F_\perp$

Vraťme se do inerciální soustavy souřadnic a vypočtěme práci vykonanou silou $F_\perp$. Za čas $\triangle t$ vykoná síla $F_\perp$ po dráze $\triangle s = v_\perp \,.\, \triangle t$ práci

$$\triangle W = F_\perp \,.\, v_\perp \,.\, \triangle t = 2m\omega_Z v_r \,.\, v_\perp \,.\, \triangle t = 2m\omega_Z v_r \,.\, \triangle t \,.\, r \,.\, \omega_Z =$$
$$= 2m\omega_Z^2 r \,.\, \triangle r \doteq m\omega_Z^2\,[(r + \triangle r)^2 - r^2] \,.$$

Úvahami analogickými úvahám v článku [1] pak již lehce odvodíme, že celková práce při změně r z hodnoty r_1 na r_2 je

$$W = m\omega_Z^2 r_2^2 - m\omega_Z^2 r_1^2 \,. \tag{14}$$

Postačí tato práce k dodání energie, již těleso při zvednutí z $r_1 = r_Z$ na vrchol Věže ($r = r_2$) získalo?

Kinetická energie tělesa je (při nulové radiální rychlosti)

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}\, m v_\perp^2 = \frac{1}{2}\, m\omega_Z^2 r^2 \,.$$

Potenciální energie tělesa v gravitačním poli Země je ($\varkappa$ je gravitační konstanta, M_Z hmotnost Země):

$$E_{\mathrm{pot}} = -\frac{\varkappa M_Z m}{r} \,. \tag{15}$$

(Pokud čtenář nezná vztah (15), nechť jej přijme za pravdivý. Zde by jeho odvozování článek příliš roztříštilo a protáhlo.)

Rozdíl energií E_2 na vrcholu a E_1 u paty Věže je tedy

$$E_2 - E_1 = -\frac{\varkappa M_Z m}{r_2} + \frac{1}{2}\, m\omega_Z^2 r_2^2 - \left(-\frac{\varkappa M_Z m}{r_1} + \frac{1}{2}\, m\omega_Z^2 r_1^2\right) =$$
$$= \frac{\varkappa M_Z m}{r_1} - \frac{\varkappa M_Z m}{r_2} + \frac{1}{2}\, m\omega_Z^2\,(r_2^2 - r_1^2) \,. \tag{16}$$

Ze vztahů (5) a (13) v článku [1] však po úpravě plyne, že

$$\frac{\varkappa M_Z m}{r_1} - \frac{\varkappa M_Z m}{r_2} = \frac{1}{2}\omega_Z^2 (r_2^2 - r_1^2) m \, .$$

Po dosazení do (16) je tedy zřejmé, že rozdíl energií

$$E_2 - E_1 = m\omega_Z^2 (r_2^2 - r_1^2)$$

se rovná práci síly $F_\perp$ (viz (14)). Energetická bilance je tedy zachráněna.

A co na to Země?

Aby mohla Věž působit silou $F_\perp$ na těleso, musí na Věž působit Země — energie dodaná tělesu jde na úkor rotační energie Země. Při vytažení tělesa ve Věži se tedy zřejmě rotace Země poněkud zpomalí. Co to však znamená „poněkud"? Nemůže činnost kosmického výtahu změnit rotaci Země natolik, že by to mohlo mít závažné důsledky i pro běžný život (prodloužení dne a noci, změny počasí atd.)?

Změna rychlosti rotace Země se ovšem může spočítat. Pomůže nám k tomu 2. věta impulsová (11), resp. její důsledek. Na soustavu Země (+ Věž) + těleso totiž nepůsobí vnější síly (resp. jejich působení — např. gravitační působení Měsíce a Slunce — zde pro jednoduchost neuvažujeme). Moment vnějších sil je proto rovněž nulový a ze vztahu (11) pak plyne, že i změna momentu hybnosti je nulová: $\triangle L = 0$, čili nutně

$$L_{\text{celk.}} = \text{const.} \, , \tag{17}$$

kde celkový moment hybnosti

$$L_{\text{celk.}} = L_Z + L \tag{18}$$

je součtem momentu hybnosti Země L_Z a tělesa L.

Poznamenejme, že vztah (17) je speciálním případem *zákona zachování momentu hybnosti* (který říká, že moment hybnosti soustavy těles, na niž nepůsobí vnější síly, je konstantní). Tento zákon má stejně fundamentální význam jako zákon zachování energie.

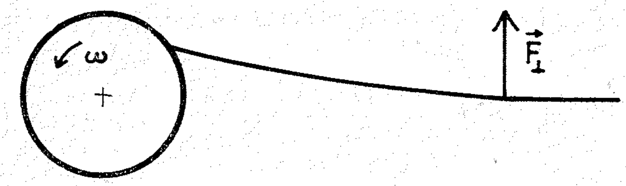
Zákon zachování momentu hybnosti nám umožní vypočítat změnu úhlové rychlosti rotace Země při zdvihání těles i v případě, že Věž není ideálně tuhá a situace vypadá zřejmě nějak tak, jak to ukazuje obr. 4. Platnost vztahu (17) totiž nezávisí na tuhosti tyče, jejím tvaru ani na jiných konkrétních okolnostech.

Moment hybnosti malého tělesa (hmotného bodu) ve Věži je dán vztahem (12). Před zdviháním tělesa je tedy

$$L_1 = m\omega_Z r_1^2 \tag{19}$$

a po vyzdvižení na vrchol Věže

$$L_2 = m(\omega_Z + \triangle\omega) r_2^2 \, , \tag{20}$$



Obr. 4

Obr. 4. Schematický náčrtek reálné Věže při vytahování tělesa.

kde $\triangle\omega$ je přírůstek úhlové rychlosti rotace Země.

V obecném případě je moment hybnosti tělesa dán vztahem

$$L_{\text{tělesa}} = J \, . \, \omega \, , \tag{21}$$

kde J je tzv. moment setrvačnosti tělesa (kolem dané osy), charakterizující rozložení hmotnosti v tělese. Např. pro homogenní kouli o hmotnosti M a poloměru R je pro osu procházející jejím středem

$$J_{\text{koule}} = \frac{2}{5} M R^2 \, . \tag{22}$$

(Pokud se zde čtenář dočetl o momentu setrvačnosti poprvé v životě, musí na tomto místě přijmout vztahy (21) a (22) jako fakt. Odvození momentu setrvačnosti by totiž zasluhovalo zvláštní článek.)

Moment setrvačnosti Země i s Věží (označme jej J_Z) se při pohybu tělesa nemění; mění se jen úhlová rychlost (z hodnoty ω_Z na $\omega_Z + \triangle\omega$). Je tedy na začátku vytahování

$$L_{Z1} = J_Z \, . \, \omega_Z \tag{23}$$

a na konci

$$L_{Z2} = J_Z \, . \, (\omega + \triangle\omega) \, . \tag{24}$$

Protože celkový moment hybnosti zůstává konstantní ($L_1 + L_{Z1} = L_2 + L_{Z2}$), je (z (19), (20), (23) a (24))

$$\omega_Z (m r_1^2 + J_Z) = (\omega_Z + \triangle\omega)(m r_2^2 + J_Z) \, ,$$

z čehož po úpravě

$$\triangle\omega = -\, \omega_Z \frac{m(r_2^2 - r_1^2)}{J_Z + m r_2^2} \tag{25}$$

($\triangle\omega$ je záporné, rychlost rotace Země tedy po vytažení tělesa poklesne, jak je ostatně zřejmé již z názoru).

Pro hrubý odhad $\triangle\omega$ můžeme moment setrvačnosti Země odhadnout podle vztahu (22) pro homogenní kouli:

$$J_Z \approx \frac{2}{5} M_Z r_Z^2 \, ,$$

kde M_Z je hmotnost Země. (Ve skutečnosti bude J_Z poněkud nižší, neboť Země není homogenní. Příspěvek Věže k J_Z v tomto odhadu samozřejmě zanedbáváme.)

Ve vztahu (25) můžeme při odhadu zanedbat v čitateli r_1^2 oproti r_2^2 a ve jmenovateli člen mr_2^2 oproti J_Z (jistě nebudeme ve Věži zdvihat náklady o hmotnosti srovnatelné s hmotností Země!). Dostáváme pak

$$\left|\frac{\triangle\omega_Z}{\omega_Z}\right| \approx \frac{5}{2}\frac{m}{M_Z}\left(\frac{r_2}{r_Z}\right)^2 \approx 10^3 \cdot \frac{m}{M},$$

kde jsme za r_2 dosadili výšku Věže danou vztahem (15) v [1]. Při přesnějším odhadu J_Z by $|\triangle\omega_Z|$ vyšlo poněkud vyšší, ale řádově stejné. Např. pro těleso o hmotnosti tisíc tun tak můžeme odhadnout, že řádově je $|\triangle\omega_Z| / \omega_Z < 10^{-15}$. Vidíme, že při vytahování nákladů „rozumné" hmotnosti se rotace Země příliš nezpomalí.

Co říci na závěr? Snad jen tolik, že náš rozbor problému, přestože nás přivedl k několika užitečným novým pojmům a vztahům, samozřejmě není vyčerpávající. Ale tak je tomu ve fyzice často, ať už se inspirujeme problematikou převzatou ze sci-fi či nikoliv. A nemělo by to být důvodem k rozčarování — máme se snad zlobit proto, že zůstávají zajímavé otázky k přemýšlení?

Literatura:

[1] Dvořák, L.: Přepočítejte si sci-fi, RMF č. 8, roč. 62, str. 343.
[2] Clarke, A. C.: Rajské fontány. Český překlad v: Clarke, A. C.: Vesmírná Odyssea 2001 / Rajské fontány, Odeon, Praha. 1982.