Jak provokovat, když dostanete úlohu o pádu železné a dřevěné koule II

Leoš Dvořák,
MFF UK, Praha

Úvod: co o pádu těles už víme a co dosud ne

V článku [1] jsme si trochu „zaprovokovali“ ohledně úlohy týkající se otázky, zda dřevěná a železná koule puštěné ze stejné výšky dopadnou současně, resp. která dopadne dřív. Kromě provokování jsme odvodili vztah pro zrychlení koule při pádu v odporujícím prostředí (konkrétně ve vzduchu):

$$a_x = g' \left(1 - K v^2\right) , \qquad (1)$$

kde

$$g' = g \left(1 - \rho_{\mathrm{v}}/\rho_K \right) \qquad (2)$$

a

$$K = \frac{\rho_{\mathrm{v}}}{\rho_K} \frac{3}{8} C \frac{1}{g' R} \ . \qquad (3)$$

Přitom g je tíhové zrychlení, ρ_v hustota vzduchu, ρ_K hustota materiálu koule, R její poloměr a C koeficient, který se vyskytuje v Newtonově vzorci pro odporovou sílu; pro kouli je v širokém rozsahu rychlostí roven 0,47. Vztah (1) zohledňuje i vztlakovou sílu působící na těleso, její vliv je ale pro tělesa ze dřeva či železa velmi malý.

V článku [1] jsme při rozboru problému dospěli jednak k aproximaci pro hodně malé rychlosti, tedy těsně na začátku pádu, a jednak k aproximaci pro pád trvající dlouho, kdy se tíhová síla a síla odporu prostředí prakticky vyrovnají, rychlost dosáhne tzv. mezní rychlosti a dál už se nezvyšuje. Mezní rychlost jsme spočetli, je

$$v_{\mathrm{m}} = \frac{1}{\sqrt{K}} \ . \qquad (4)$$

Z uvedených vztahů jasně plyne, že mezní rychlost železné koule je výrazně vyšší než mezní rychlost stejně velké koule dřevěné (dosazení (3) do (4) dá $v_{\mathrm{m}} \sim \sqrt{\rho_K}$), takže železná koule zřejmě dopadne dřív, než železná. (Ne že by nás to překvapilo, z kvalitativních úvah nám to bylo jasné. Teď to ale máme podloženo i vzorcem.)

Zatím ale nevíme, za jak dlouho se padající těleso mezní rychlosti významně přiblíží a jak dlouhou dráhu přitom urazí. Takže také nevíme, o jakou dobu bude železná koule „na cílové pásce“, tedy na zemi, dřív. Abychom to zjistili, musíme pád koule v odporujícím prostředí spočítat podrobně. Bude to chtít zapojit trochu víc matematiky, ale to zvládneme.

Přesnější výpočet pádu koule: rychlost

Při výpočtu vyjdeme z rovnice (1) pro zrychlení. Zrychlení a_x je změna rychlosti dělená časem, za který se rychlost změní:

$$a_x \doteq \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \ . \qquad (5)$$

Poznámka: Tento vzorec dává hodnotu zrychlení s určitou chybou, proto v něm píšeme $\doteq$. Chybu ale můžeme zmenšovat tím, že zmenšíme Δt. Přesnou hodnotu zrychlení dostaneme, když Δt

zmenšujeme až k nule. Z poměru $\frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$ tím vyjde takzvaná *derivace rychlosti podle času* $\frac{d\upsilon}{dt}$. Pokud derivace znáte, víte, oč jde; jestli je zatím neznáte, představujte si prostě, že Δt volíme „hrozně moc malé“. ☺

Kombinací (1) a (5) dostaneme

$$\frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = g' \left(1 - K\upsilon^2\right) . \tag{6}$$

Tohle je rovnice, která určuje časovou závislost rychlosti. Potřebujeme tedy najít takovou funkci $\upsilon = \upsilon(t)$, která bude rovnici (6) splňovat, tedy při dosazení dá stejnou levou i pravou stranu.

Na to, jak tuto rovnici řešit, bychom se mohli ptát matematiků. Pro takový dotaz je ale vhodné rovnici co nejvíc zjednodušit. (Matematikům většinou bude jedno, co znamenají naše konstanty g' a K a jaké jednotky mají veličiny v dané rovnici.) Zkusme tedy zjednodušovat.

Ze vztahu (4) vidíme, že $K\upsilon^2 = \left(\upsilon/\upsilon_m\right)^2$. Může nás tedy napadnout, že bude přirozené zavést novou veličinu

$$\tilde{\upsilon} = \frac{\upsilon}{\upsilon_m} . \tag{7}$$

Má význam rychlosti, ale je to veličina bezrozměrná. Když ji použijeme, bude závorka na pravé straně rovnice prostě $\left(1-\tilde{\upsilon}^2\right)$. Pro úpravu levé strany (6) si uvědomíme, že $\upsilon = \upsilon_m \tilde{\upsilon}$, a tedy přírůstek rychlosti je $\Delta\upsilon = \upsilon_m \Delta\tilde{\upsilon}$. Vydělíme-li (6) konstantou g', můžeme levou stranu upravit na tvar

$$\frac{1}{g'}\frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \frac{\upsilon_m}{g'}\frac{\Delta\tilde{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\Delta\tilde{\upsilon}}{\frac{g'}{\upsilon_m}\Delta t} .$$

To nás může přivést k myšlence, zavést novou proměnnou

$$\tilde{t} = \frac{g'}{\upsilon_m} t = g'\sqrt{K}\, t . \tag{8}$$

$\tilde{t}$ má význam času, ale opět jde o bezrozměrnou proměnnou. Rovnice (6) má po zavedení nových proměnných jednoduchý tvar[1]

$$\frac{\Delta\tilde{\upsilon}}{\Delta\tilde{t}} = 1 - \tilde{\upsilon}^2$$

a my se můžeme ptát matematiků, jaké má řešení. Protože ale $\Delta\tilde{t}$ má být „hrozně malé“, budeme na levé straně psát derivaci:

$$\frac{d\tilde{\upsilon}}{d\tilde{t}} = 1 - \tilde{\upsilon}^2 . \tag{9}$$

Této rovnici už bude matematik rozumět (byť by si ji sám spíš zapsal ve tvaru $\frac{dy}{dx} = 1 - y^2$) a snadno ji vyřeší. Je to prostě rovnice, v níž se vyskytuje derivace. Takovým rovnicím se říká *diferenciální rovnice*. Matematika jich má vyřešeno neuvěřitelné množství a existují tlusté příručky, kde jsou sepsány spousty rovnic a jejich řešení. Dnes můžeme využít i online zdroje, například WolframAlpha [2].

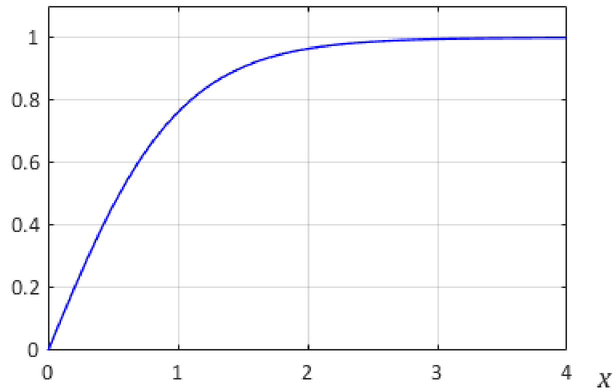
My chceme rovnici (9) vyřešit pro případ, kdy $\tilde{\upsilon}(0) = 0$. (Takovémuto zadání hodnoty řešení pro danou hodnotu nezávisle proměnné se říká *počáteční podmínka*.) Matematici, chytré příručky,

[1] Protože když přírůstek času je např. $\Delta t = t_2 - t_1$, pak přírůstek naší nové proměnné je $\Delta\tilde{t} = \tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 =$ $= (g'/\upsilon_m)t_2 - (g'/\upsilon_m)t_1 = (g'/\upsilon_m)(t_2 - t_1) = (g'/\upsilon_m)\Delta t$.

WolframAlpha nebo jiné zdroje nás poučí, že řešením je funkce, které se říká *hyperbolická tangenta* (nebo *hyperbolický tangens*, zkratka je tgh nebo tanh).[2] Tuto funkci najdete na lepších kalkulačkách a také v Excelu (tam se označuje TGH). Dá se vyjádřit také pomocí exponenciální funkce:

$$\mathrm{tgh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \ . \tag{10}$$

Pro malé hodnoty *x* (do několika desetin) je tgh(*x*) ≐ *x*, pro velká *x* jde tgh(*x*) k 1, viz obrázek 1.



Obr. 1. Průběh funkce tgh(*x*)

Řešení rovnice (9) je tedy

$$\tilde{\upsilon}(\tilde{t}) = \mathrm{tgh}(\tilde{t}) = \frac{e^{\tilde{t}} - e^{-\tilde{t}}}{e^{\tilde{t}} + e^{-\tilde{t}}} \ . \tag{11}$$

Pokud umíte derivovat, můžete si zkontrolovat, že po dosazení do (9) se levá strana opravdu rovná pravé.

Řešení naší původní rovnice (6), resp. příslušné diferenciální rovnice $\frac{d\upsilon}{dt} = g'\left(1 - K\upsilon^2\right)$, dostaneme pomocí (7) a (8) jako

$$\upsilon(t) = \upsilon_m \,\mathrm{tgh}\left(\frac{g'}{\upsilon_m} t\right) .$$

Označíme-li navíc

$$\tau = \frac{\upsilon_m}{g'} \ , \tag{12}$$

dostane řešení tvar

$$\upsilon(t) = \upsilon_m \,\mathrm{tgh}\left(t/\tau\right) . \tag{13}$$

Tento výsledek už se dá velmi dobře interpretovat. Rychlost υ během pádu plynule vzrůstá od nuly k mezní rychlosti υ_m. Na obr. 1 vidíme, jak rychle se υ blíží k mezní rychlosti: Pro $t = \tau$ dosahuje téměř 80 % υ_m, pro $t = 2\tau$ přes 95 % υ_m, přesněji si to můžete sami spočítat na kalkulačce. Pro

[2] V příkladech ve WolframAlpha ([2]) jsou funkce, které hledáme jako řešení, označeny f(t) a derivace se značí čárkou. Přímo naše rovnice v příkladech není, nejblíže je jí příklad f´(t)= f(t)^2 + 1. Změnou jediného znaménka však získáme f´(t)= –f(t)^2 + 1, a to už je naše rovnice. Jako řešení po ťuknutí na symbol rovnítka WolframAlpha určí funkci $\left(e^{2t} - e^{2c_1}\right) / \left(e^{2c_1} + e^{2t}\right)$. Naší počáteční podmínce odpovídá c_1=0; po úpravě odsud dostaneme dále uvedené řešení (10).

$t = 3\tau$ se už rychlost od mezní liší o méně než půl procenta. Hodnota τ tedy představuje charakteristický čas, za který se rychlost významně přiblíží rychlosti mezní.

Z (12), (4) a (3) dostáváme pro tento čas výsledek

$$\tau = \sqrt{\frac{\rho_K}{\rho_v}\frac{8}{3C}\frac{R}{g'}} \quad . \tag{14}$$

Pro konkrétní případy, které jsme uvažovali v článku [1], jsou charakteristické časy (zaokrouhlené na desetiny sekundy) uvedeny v tabulce 1.

Tabulka 1: Charakteristický čas τ pro pád železné a dřevěné koule

	čas τ pro průměr koule:	
materiál koule:	1 cm	10 cm
železo	4,4 s	13,8 s
dřevo	1,0 s	3,3 s

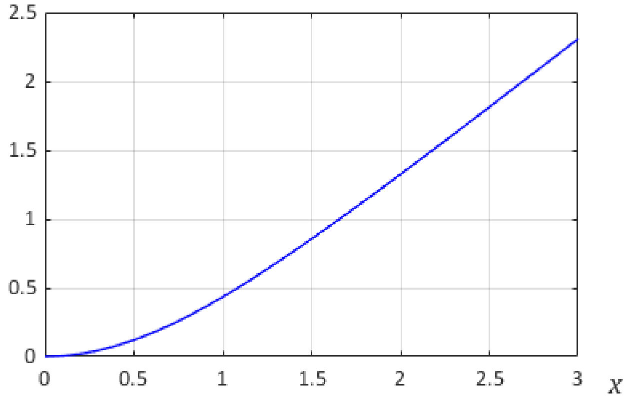
Přesnější výpočet pádu koule: uražená dráha

Známe tedy rychlost pádu – ale nevíme, jakou vzdálenost padající koule za určitý čas urazí. A neumíme také odpovědět na otázku související se zadáním úlohy: Jak moc se budou lišit doby pádu železné a dřevěné koule ze stejné výšky?

Dráhu uraženou za určitý čas můžeme spočítat sečtením kousků dráhy, které těleso urazí v malých časových intervalech Δt. Když se tenhle „vágně nahozený“ postup precizuje, vede k tomu, že dráha je *integrálem* rychlosti.

Pokud jste se s integrály dosud nesetkali, nezoufejte, podrobně zde výpočet provádět nebudeme. Ostatně, i vy, kdo jste se s integrály už potkali, jste asi málokdy integrovali funkci hyperbolický tangens – což je to, co je k výpočtu dráhy padající koule potřeba. Pomoci nám může opět WolframAlpha [3].[3] Zjistíme, že $\int \mathrm{tgh}(x)dx = \ln(\cosh(x)) + \mathrm{konst.}$, kde $\cosh(x)$ je *hyperbolický kosinus*, což je funkce definovaná vztahem $\cosh(x) = \left(e^x + e^{-x}\right)/2$. Integrační konstanta uvedená ve vztahu pro integrál je v našem případě (pro x=0 chceme nulovou hodnotu funkce) rovna nule. Průběh funkce $\ln(\cosh((x))$ ukazuje obrázek 2.

[3] V části Integrals zvolte Compute an Indefinite Integral a do daného políčka napište integrate tanh(x) dx . Pozor, ve výsledku WolframAlpha píše log(cosh(x)), ale symbolem „log“ míní *přirozený logaritmus*, ten my běžně značíme symbolem ln.



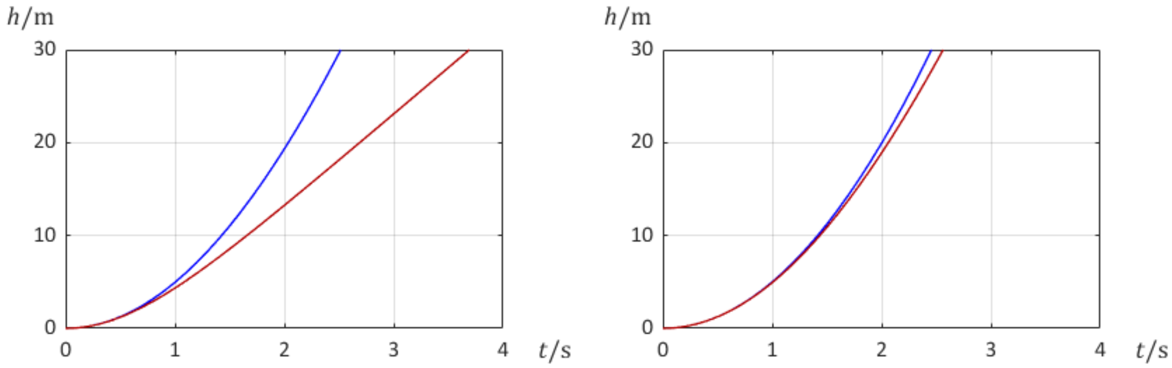
Obr. 2. Průběh funkce $\ln(\cosh((x))$

Výsledná dráha h, kterou padající těleso urazí za čas t, je dána vztahem

$$h(t) = \tau v_m \ln\left(\cosh\left(t/\tau\right)\right) = g' \tau^2 \ln\left(\cosh\left(t/\tau\right)\right) . \tag{15}$$

(Podrobně zde tento vztah odvozovat nebudeme. Kdo umíte derivovat, můžete se přesvědčit, že derivací dráhy (15) podle času získáme rychlost (13); to je kontrola, že vztah (15) je správně.)

Závislost uražené dráhy na čase ukazuje obrázek 3. Vidíme z něj, že dřevěná koule opravdu dopadne později, než železná. Rozdíl je přitom větší u malých kuliček; výrazněji se ovšem projevuje až při výšce pádu nejméně několik metrů.



a) b)

Obr. 3. Pád železné a dřevěné koule ve vzduchu.
Modrá křivka: železná koule, červená křivka: dřevěná koule. Průměr koulí: a) 1 cm, b) 10 cm.

Pokud chceme znát dobu pádu při zadané výšce pádu h, musíme k funkci (15) najít funkci *inverzní*. Pro názornost je vhodné přepsat si (15) nejprve na tvar $h/\left(g'\tau^2\right) = \ln\left(\cosh\left(t/\tau\right)\right)$. Inverzní funkcí k logaritmu je exponenciála, takže odsud dostaneme $\cosh\left(t/\tau\right) = e^{h/(g'\tau^2)}$. Pak už zbývá aplikovat jen inverzní funkci k hyperbolickému kosinu. Ta se označuje argcosh.[4] Čas pádu je tedy dán vztahem $t/\tau = \operatorname{arg\,cosh}\left(e^{h/(g'\tau^2)}\right)$, čili

$$t = \tau \operatorname{argcosh}\left(e^{h/(g'\tau^2)}\right) \tag{16}$$

[4] Někdy také arcosh nebo arccosh; ve WolframAlpha ArcCosh, v Excelu pak ARCCOSH.

Po dosazení vyjde, že pro pád z výšky například 5 metrů dopadne železná kulička o průměru 1 cm o 77 milisekund dříve, než dřevěná, pro koule o průměru 10 cm je rozdíl jen necelých 9 ms. Naměřit takový rozdíl už může být při jednoduchém experimentování docela výzva. Těžké není naměřit časy dopadu. Bouchnutí kuliček o nějakou desku může zachytit mikrofon, a třeba v programu Audacity můžeme určit čas přesněji než na desetinu milisekundy. Větší problém bude s takovouto přesností vypustit kuličky ve stejný čas. Takže pro jednoduché pokusničení raději porovnávejte pád třeba železné koule s koulí z polystyrenu.

Větší rozdíly v časech samozřejmě nastávají při pádech z větších výšek: při pádu 1 cm kuliček z 28 metrů je rozdíl časů už prakticky 1 sekunda, a u 10 cm koulí asi desetina sekundy. Ale pouštět z takové výšky čtyřkilogramovou kouli, pro to už by bylo naprosto nezbytné striktně zajistit, aby na dopadové ploše nikdo nemohl být ani náhodou.[5] Takže takovéto pokusy raději neprovádějte.

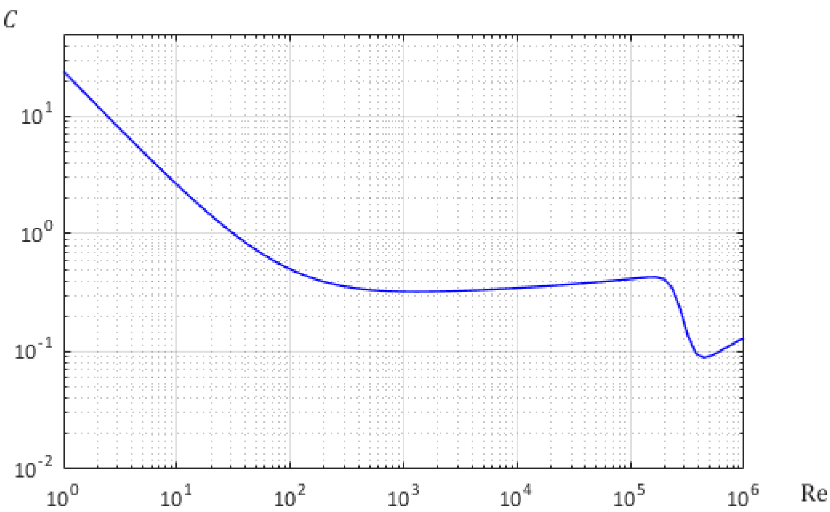
Pojďme se raději na problém padajících koulí podívat ještě trochu detailněji.

Realita je ještě složitější…

Zatím jsme při našich výpočtech uvažovali, že odporová síla je přesně úměrná druhé mocnině rychlosti. Ale už v článku [1] jsme zmínili, že ve vztahu (I.2),[6] tedy

$$F_o = \tfrac{1}{2} C \rho_v S v^2 \ ,$$

není pro všechny rychlosti C přesně konstantní. Na internetu můžeme najít grafy, které tuto nekonstantnost ukazují. Vypadají zhruba tak, jak ukazuje obrázek 4.



Obr. 4. Závislost koeficientu odporu C na Reynoldsově čísle.

Takovéto grafy najdete například ve vysokoškolských skriptech (např. [5]), ale třeba i na stránkách NASA [6]. Závislost C na rychlosti se proměřuje experimentálně ve větrných tunelech. Graf na obr. 4 byl sestrojen s využitím vzorce v článku [7][7], který aproximuje experimentální výsledky.

[5] Spočtěte si kinetickou energii takové dopadající koule, je přes 1000 J. V [4] se v odpovědi na dotaz uvádí: „na nechráněnou živou sílu v polním stejnokroji je nutná kinetická dopadová energie střely min. 100 J“. Zřejmě se tím míní energie nutná pro zabití. Sice u střely jsou mechanismy smrtícího účinku jiné než u padající koule, ale stejně…

[6] Tím míníme vztah (2) v článku [1].

Výše jsme mluvili o možné závislosti C na rychlosti v, v grafu na obr. 4 je ale na vodorovné ose pro mnohé možná neznámá veličina Re. Jde o takzvané *Reynoldsovo číslo*. To je dáno vztahem

$$\mathrm{Re} = \frac{v\,d\,\rho}{\eta}\ , \tag{17}$$

kde d je průměr koule, ρ hustota prostředí (v našem případě vzduchu) a η jeho dynamická viskozita. Pro vzduch je $\eta \doteq 1{,}8\cdot10^{-5}$ kg/(m·s), jak můžeme najít v různých tabulkách (i v [8]) nebo třeba na internetu na [9][8]. Viskozita vzduchu s teplotou mírně roste, uvedená hodnota platí pro teplotu 15°C a normální tlak, ale změna není výrazná, při teplotě 35°C je hodnota viskozity $1{,}9\cdot10^{-5}$ kg/(m·s).

Pro kouli o průměru 10 cm vychází při rychlosti 1 m/s Reynoldsovo číslo necelých $7\cdot10^{3}$. Přesně to nepotřebujeme určit, z grafu vidíme, že závislost C je pro oblast Reynoldsových čísel asi od 10^{2} do $2\cdot10^{5}$ dosti plochá. To znamená, že C můžeme brát za přibližně konstantní od rychlostí několika cm/s až po asi 30 m/s.

Pro dřevěnou kouli tedy můžeme očekávat, že náš výpočet bude platit víceméně po celou dobu pádu; pro železnou kouli by ale při vyšších rychlostech[9] odpor klesl a náš výpočet už by pohyb nepopisoval dobře. Takže tentokrát příroda zase provokuje nás… ☺

Korektní odvození pádu koule při vyšších rychlostech počítající s poklesem C by už nešlo udělat jednoduše „s tužkou a papírem“, tedy tak, aby řešení mělo tvar funkcí, jako byly (13) a (15). Museli bychom se uchýlit k numerickému řešení a využít počítač – ale to už by šlo za rámec tohoto článku.

Jak tomu bude pro menší kuličky?

Pro kuličky o průměru 1 cm je Reynoldsovo číslo rovno 10^{2} při rychlosti asi 15 cm/s a hodnoty $2\cdot10^{5}$ by dosáhlo až při rychlosti skoro 300 m/s, přitom mezní rychlost pro železnou kuličku je jen 43 m/s, viz tabulku 1 v [1]. Při vyšších rychlostech je tedy náš výpočet počítající s $F_o \sim v^2$ v pořádku, i kdyby kulička byla z platiny nebo třeba uranu…[10]

Dodejme, že Reynoldsovo číslo není „jen tak nějaká vymyšlenost“, ale důležitý údaj. Používá se k určení, zda dvě proudění jsou si podobná. Například malý model letadla a velké letadlo se při stejné rychlosti budou chovat jinak: jsou různě velké, a tedy obtékání bude charakterizováno různými Reynoldsovými čísly. Aby šlo chování letadla a modelu porovnat, musí být Reynoldsova čísla stejná.

Závěr (aneb pokračování ještě příště, půjdeme do vakua)

Pád kuliček ve vzduchu už jsme rozebrali docela podrobně a víme, že železná koule opravdu dopadne dřív než dřevěná. Ale ve vakuu bude doba jejich pádu určitě stejná! Nebo že by i ve vakuu šlo přijít s nějakou provokativní námitkou?

No, nebyli bychom to my šťourové, abychom něco nevymysleli. Takže přece jen ještě jednou v tomto seriálu:

… to be continued …

---

[7] Je zajímavé, že ač jde o dvoustránkový článek ve Wordu zveřejněný zřejmě jen na internetu, byl podle Google Scholar již 89-krát citován jinými autory. To není zrovna malý počet citací.

[8] Tam je ovšem viskozita značena symbolem μ.

[9] Viz mezní rychlosti v tabulce 1 v článku [1].

[10] Kdybyste pouštěli z velké výšky platinové kuličky a pár jich přitom poztráceli, dejte vědět, kde to bylo, za slušné nálezné se jistě najde dost dobrovolníků, kteří pomohou s hledáním. ☺

Literatura:

[1] Dvořák L.: *Jak provokovat, když dostanete úlohu o pádu železné a dřevěné koule I*. Rozhledy matematicko-fyzikální. roč. 96 (2021), č. 2, s. 57-67.

[2] WolframAlpha: *Examples for Differential Equations*. Dostupné online: https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/differential-equations/

[3] WolframAlpha: *Examples for Calculus & Analysis*. Dostupné online: https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/calculus-and-analysis/

[4] Fyzweb odpovědna: *Nebezpečnost dopadající střely*. Dostupné online: http://fyzweb.cz/odpovedna/index.php (je třeba vyhledat název „nebezpečnost dopadající střely“)

[5] Havránek A.: *Klasická mechanika II. Kontinuum*. Karolinum, Praha, 2003.

[6] NASA: *Drag of the sphere*. Dostupné online: https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/dragsphere.html

[7] Morrison F.A.: Data Correlation for Drag Coefficient for Sphere. Dostupné online: https://pages.mtu.edu/~fmorriso/DataCorrelationForSphereDrag2016.pdf

[8] Mikulčák J., Charvát J.: *Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy*. Prometheus, Praha, 2006.

[9] EngineersEdge: *Viscosity of Air, Dynamic and Kinematic*. Dostupné online: https://www.engineersedge.com/physics/viscosity_of_air_dynamic_and_kinematic_14483.htm