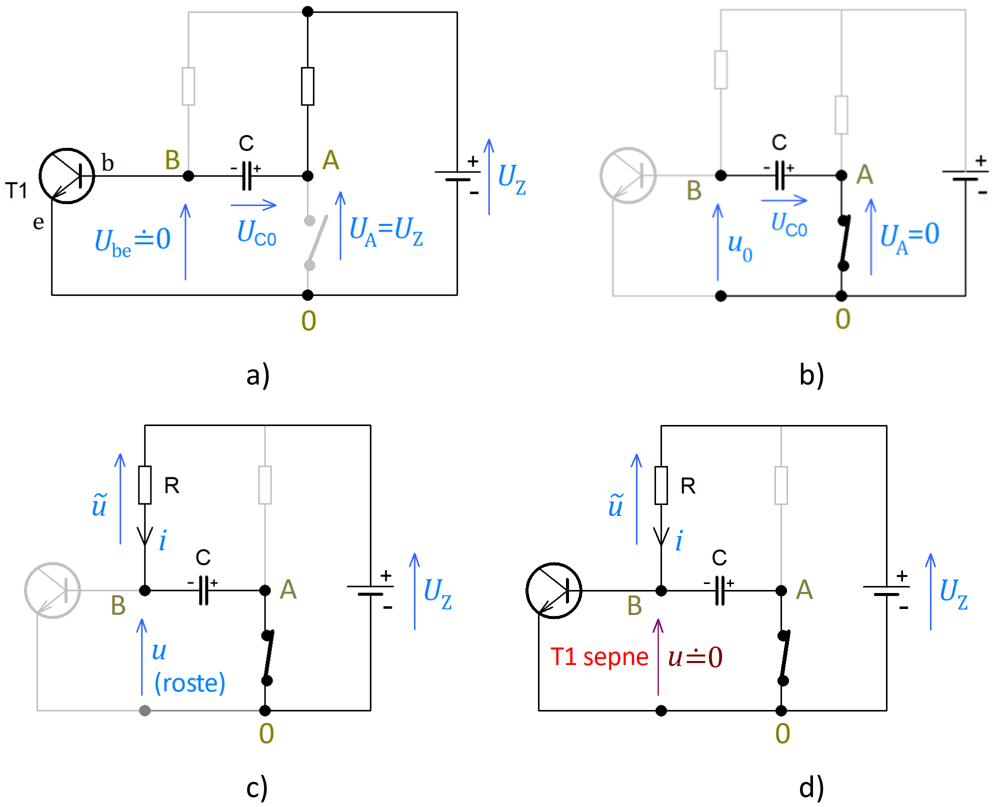
Příloha 2[1]: Perioda kmitů – obecné odvození

V části 6 hlavního příspěvku jsme odvodili periodu kmitů multivibrátoru pro konkrétní hodnoty kapacit a odporů. Pojďme nyní odvodit periodu obecně.

Nejprve budeme mnohé zanedbávat…

Pro jednoduchost budeme nejprve počítat případ bez svítivých diod a budeme předpokládat, že úbytky napětí na přechodech tranzistorů (mezi bází a emitorem a bází a kolektorem) jsou zanedbatelné proti napájecímu napětí. Jednotlivé fáze v půlperiodě kmitů ukazuje obr. 1.



Obr. 1. K odvození periody kmitů – zjednodušená verze[2]

a) Tranzistor T1 je sepnut, T2 (zobrazený jako spínač) je vypnut.
b) Stav těsně po sepnutí spínače (tranzistoru T2), $u_0 < 0$ => T1 se vypne.
c) Kondenzátor se nabíjí přes rezistor R, stále je $u < 0$,
přechod báze-emitor tranzistoru T1 je zavřený => T1 je vypnut.
d) Když napětí u přestane být záporné, tranzistor T1 opět sepne.

Nejprve je kondenzátor nabit prakticky na celé napětí zdroje, $U_{C0} \doteq U_Z$, viz obr. 1a. V čase $t = 0$ sepne spínač (tranzistor T2), napětí v bodě A se zmenší na nulu[3] a napětí v bodě B proto klesne na $u(0) = u_0 = -U_{C0} = -U_Z$, viz obr. 1b. Kondenzátorem pak teče

[1] Příloha k příspěvku Dvořák L.: *Multivibrátor*. In: Dílny Heuréky 2019. Sborník konference projektu Heuréka. Ed. V. Koudelková. Matfyzpress, Praha, 2020. (V textu na něj odkazujeme jako na „hlavní příspěvek“.)

[2] Při zjednodušeném výpočtu zanedbáváme úbytky napětí na LED a na přechodech tranzistorů. Tranzistor bereme jako ideální spínač a předpokládáme, že sepne, už když je na bázi velmi malé kladné napětí, skoro nula.

[3] Všechna napětí bereme vzhledem k bodu 0.

proud i (přes rezistor R), napětí u tedy roste, viz obr. 1c. Až se „přehoupne“ do kladných hodnot, tranzistor T1 sepne (viz obr. 1d). Čas t je roven polovině periody T: $t_{\text{konc}} = T/2$.

Jednoduché přibližné odvození bez diferenciální rovnice

Pojďme nejprve odvodit periodu přibližně, bez řešení diferenciální rovnice.

Pro napětí $\tilde{u}$ na rezistoru R a napětí u v bodě B platí $\tilde{u} + u = U_Z$, viz obr. 1c. Po sepnutí spínače (v čase $t = 0$) je na rezistoru R napětí $\tilde{u}(0) = U_Z - u(0) = 2U_Z$. To znamená, že v čase $t = 0$ teče do kondenzátoru proud

$$i(0) = \frac{\tilde{u}(0)}{R} = \frac{2\,U_Z}{R} \,. \tag{1}$$

Těsně přes sepnutím tranzistoru T1, tedy v čase $t_{\text{konc}} = T/2$, je napětí na rezistoru R rovno $\tilde{u}(t_{\text{konc}}) = U_Z$ (viz obr 1d), takže do kondenzátoru teče proud

$$i(t_{\text{konc}}) = \frac{\tilde{u}(t_{\text{konc}})}{R} = \frac{U_Z}{R} \,. \tag{2}$$

Průměrný proud v časovém intervalu můžeme přibližně odhadnout tak, že vezmeme aritmetický průměr z hodnot (1) a (2)[4]:

$$i_{\text{průměrný}} \doteq \frac{i(0) + i(t_{\text{konc}})}{2} = \frac{3U_Z}{2R} \,. \tag{3}$$

Napětí v bodě B se v uvedeném časovém intervalu mění z $-U_Z$ na nulu. Náboj, který musí protéct kondenzátorem, je tedy

$$Q = C \cdot U_Z \,. \tag{4}$$

Náboj, který přitekl, je součinem proudu[5] a času:

$$Q = i_{\text{průměrný}} \cdot t_{\text{konc}} \,. \tag{5}$$

Z (4) a (5) dostáváme $t_{\text{konc}} = Q / i_{\text{průměrný}} = C \cdot U_Z / i_{\text{průměrný}}$ a po dosazení (3):

$$t_{\text{konc}} = \frac{C \cdot U_Z}{i_{\text{průměrný}}} = C \cdot U_Z \cdot \frac{2R}{3U_Z} = \frac{2}{3} RC \,.$$

A protože $t_{\text{konc}} = T/2$, dostáváme pro periodu T vztah

$$T = \frac{4}{3} RC \doteq 1{,}33\, RC \,. \tag{6}$$

---

[4] Určitě to není přesné a samozřejmě si musíme být vědomi, že obecně se takto průměrná (resp. střední) hodnota časově proměnné veličiny obecně odhadnout nedá! Jak ale uvidíme dále, v našem případě chyba určení periody nepřekročí několik procent.

[5] Samozřejmě průměrného proudu, obecně je náboj integrálem proudu přes čas, ale to do našeho jednoduchého odvození nebudeme zdůrazňovat.

Přesné odvození (s jednoduchou diferenciální rovnicí)

Náboj na kondenzátoru (v čase t) je $Q = C \cdot u$. Časová derivace náboje je proud: $i = \dfrac{dQ}{dt}$.

Odtud po úpravě a využití toho, že $u = U_Z - \tilde{u}$, dostáváme

$$i = C\frac{du}{dt} = -C\frac{d\tilde{u}}{dt} \ . \tag{7}$$

Proud rezistorem R je

$$i = \frac{\tilde{u}}{R} \ . \tag{8}$$

Kombinací (7) a (8) dostaneme kýženou diferenciální rovnici:

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = -\frac{1}{RC}\cdot\tilde{u} \ . \tag{9}$$

Jejím řešením je[6]

$$\tilde{u}(t) = \tilde{u}_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \ . \tag{10}$$

A teď už je určení periody jednoduché. Počáteční hodnota napětí je $\tilde{u}(0) = \tilde{u}_0 = 2U_Z$, koncová hodnota

$$\tilde{u}(t_{\mathrm{konc}}) = U_Z \ . \tag{11}$$

Koncovou hodnotu dostaneme také z (10):

$$\tilde{u}(t_{\mathrm{konc}}) = \tilde{u}_0 \cdot e^{-\frac{t_{\mathrm{konc}}}{RC}} = 2U_Z \cdot e^{-\frac{t_{\mathrm{konc}}}{RC}} \ . \tag{12}$$

Kombinací (11) a (12) a úpravou pak získáme

$$U_Z = 2U_Z \cdot e^{-\frac{t_{\mathrm{konc}}}{RC}} \quad => \quad e^{\frac{t_{\mathrm{konc}}}{RC}} = 2 \quad => \quad \frac{t_{\mathrm{konc}}}{RC} = \ln(2) \ .$$

A protože $T = 2\,t_{\mathrm{konc}}$, je výsledný vztah pro periodu:

$$T = 2\cdot\ln(2)\cdot RC \doteq 1{,}39\cdot RC \ . \tag{13}$$

Tento vztah bývá někdy uváděn jako vztah pro periodu kmitů multivibrátoru. Jeho odvození už respektovalo fakt, že proud při nabíjení kondenzátoru se nemění lineárně s časem. (Vidíme, že výše uvedený přibližný výsledek (6) se od (13) liší jen o necelé 4 %.)

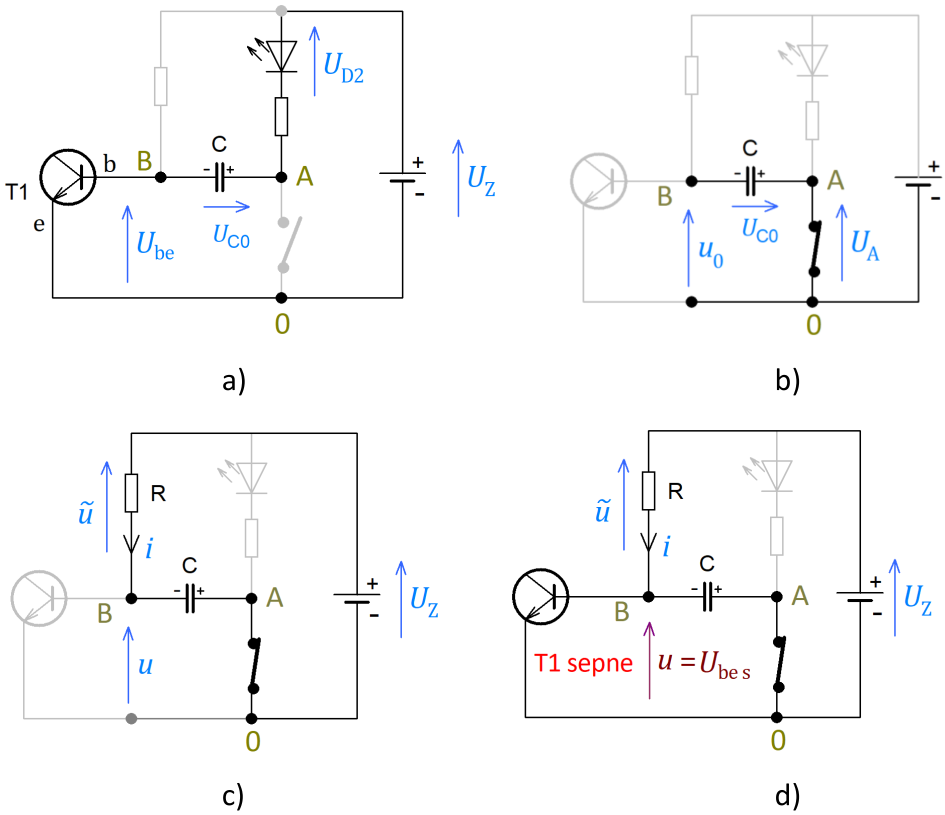
Nemůžeme ovšem očekávat, že (13) vystihne přesně periodu našeho blikače. Při jeho odvození jsme totiž ignorovali všemožné úbytky napětí na polovodičových součástkách. Pojďme to napravit.

---

[6] Postup řešení zde neuvádíme. K tomu, abychom se přesvědčili, že (10) je opravdu řešením rovnice (9), nepotřebujeme ale řešit diferenciální rovnice, stačí umět derivovat.

Blíže k realitě: počítáme s úbytky napětí

Obrázek 2 ukazuje stejné situace jako obr. 1, jsou v něm ovšem vyznačeny úbytky napětí.



Obr. 2. K odvození periody kmitů

a) Tranzistor T1 je sepnut, T2 (zobrazený jako spínač) je vypnut.
b) Stav těsně po sepnutí spínače (tranzistoru T2), $u_0 < 0$ => T1 se vypne.
c) Kondenzátor se nabíjí přes rezistor R, stále je $u < U_{be\,s}$,
přechod báze-emitor tranzistoru T1 je zavřený => T1 je vypnut.
d) Když napětí u dosáhne $U_{be\,s}$ (asi 0,5 V), tranzistor T1 opět sepne.

Z obr. 2a vidíme, že počáteční napětí na kondenzátoru je $U_{C0} = U_Z - U_{D2} - U_{be}$.[7] Počáteční napětí v bodě B je (viz obr. 2b)[8]:

$$u_0 = -U_{C0} + U_A = -U_Z + U_{D2} + U_{be} + U_{ce\ sepnuto} \tag{14}$$

Koncové napětí je

$$u(t_{konc}) = U_{be\,s}\ .^{9} \tag{15}$$

Po využití toho, že $\tilde{u} = U_Z - u$ dostáváme z (14) a (15)

$$\tilde{u}(0) \equiv \tilde{u}_0 = U_Z - u_0 = 2U_Z - (U_{D2} + U_{be} + U_{ce\ sepnuto}), \qquad \tilde{u}(t_{konc}) = U_Z - U_{be\,s} \tag{16}$$

---

[7] Konkrétní hodnoty budou přibližně $U_{D2} \doteq 1{,}6$ V, $U_{be} \doteq 0{,}7$ V.

[8] Nenulové napětí v bodě A je dáno tím, že tranzistor jako spínač není ideální, takže mezi kolektorem a emitorem je i v sepnutém stavu malé napětí $U_{ce\ sepnuto}$, přibližně 0,2 V. Takže $U_A = U_{ce\ sepnuto}$.

[9] $U_{be\,s}$ je napětí, při němž tranzistor spíná (resp. „začíná spínat“). Jeho velikost můžeme vzít přibližně 0,5 V.

Náboj, který musí přitéct do kondenzátoru, je (po dosazení (14) a (15))

$$Q = C\cdot\left(u(t_{\text{konc}})-u_0\right) = C\cdot\left(U_Z-(U_{\text{D2}}+U_{\text{be}}+U_{\text{ce sepnuto}}-U_{\text{be s}})\right). \qquad (17)$$

Přibližný výpočet z „průměrného proudu“

Aritmetický průměr z proudu na počátku a na konci půlperiody získáme pomocí Ohmova zákona a (16):

$$i_{\text{průměrný}} = \frac{i(0)+i(t_{\text{konc}})}{2} = \frac{\tilde{u}(0)+\tilde{u}(t_{\text{konc}})}{2R} = \frac{3U_Z-(U_{\text{D2}}+U_{\text{be}}+U_{\text{ce sepnuto}}+U_{\text{be s}})}{2R} \qquad (18)$$

Z toho, že $Q = i_{\text{průměrný}}\cdot t_{\text{konc}}$ (viz výše vztah (5)) a (17) a (18) dostáváme

$$t_{\text{konc}} = \frac{Q}{i_{\text{průměrný}}} = 2RC\cdot\frac{U_Z-(U_{\text{D2}}+U_{\text{be}}+U_{\text{ce sepnuto}}-U_{\text{be s}})}{3U_Z-(U_{\text{D2}}+U_{\text{be}}+U_{\text{ce sepnuto}}+U_{\text{be s}})}$$

Protože perioda $T = 2t_{\text{konc}}$, dává náš přibližný výpočet

$$T = \frac{4}{3}RC\cdot\frac{U_Z-(U_{\text{D2}}+U_{\text{be}}+U_{\text{ce sepnuto}}-U_{\text{be s}})}{U_Z-\frac{1}{3}(U_{\text{D2}}+U_{\text{be}}+U_{\text{ce sepnuto}}+U_{\text{be s}})} \quad . \qquad (19)$$

Pro velké U_Z se výsledek v limitě samozřejmě blíží výsledku (6) odvozenému při zanedbání úbytků napětí na polovodičových prvcích.

Pro hodnoty úbytků napětí uvedené výše je zlomek ve výrazu (19) roven $\left(U_Z-2\,\text{V}\right)/\left(U_Z-1\,\text{V}\right)$. Pro U_Z = 9 V vychází $T \doteq 1{,}17\,RC$, tedy asi o 12 procent menší než při zanedbání úbytků napětí na polovodičových součástkách.[10]

Přesný výpočet pomocí diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice popisující změnu napětí $\tilde{u}$ s časem je stejná jako jsme používali výše, tj. (9). Stejné je i její řešení (10), takže platí

$$\tilde{u}(t_{\text{konc}}) = \tilde{u}_0\cdot e^{-\frac{t_{\text{konc}}}{RC}} \quad . \qquad (20)$$

Dosazení (16) do (20) dá

$$U_Z-U_{\text{be s}} = \left(2U_Z-(U_{\text{D2}}+U_{\text{be}}+U_{\text{ce sepnuto}})\right)\cdot e^{-\frac{t_{\text{konc}}}{RC}} \quad .$$

Odtud $t_{\text{konc}} = RC\cdot\ln\left(\frac{2U_Z-(U_{\text{D2}}+U_{\text{be}}+U_{\text{ce sepnuto}})}{U_Z-U_{\text{be s}}}\right)$, takže

$$T = 2RC\cdot\ln\left(2\frac{U_Z-\frac{1}{2}(U_{\text{D2}}+U_{\text{be}}+U_{\text{ce sepnuto}})}{U_Z-U_{\text{be s}}}\right) \quad . \qquad (21)$$

Zlomek v logaritmu je pro konkrétní hodnoty úbytků $\left(U_Z-1{,}25\,\text{V}\right)/\left(U_Z-0{,}5\,\text{V}\right)$. Pro U_Z = 9 V vychází $T \doteq 2RC\cdot\ln(1{,}82)\doteq 1{,}20\,RC$, což je asi o 14 % kratší než dle (13).

[10] Podstatný pro tento rozdíl je úbytek napětí na svítivé diodě; blikač s LEDkami má skutečně o něco kratší periodu než multivibrátor bez LED.

Je zajímavé, že pro blikač bez LED dává (21) (kam dosadíme U_{D2} = 0 a vzali bychom U_{be} = 0,8 V) po dosazení konkrétních hodnot výsledek $T \doteq 2RC \cdot \ln\left(2\dfrac{U_Z - 0{,}5\,\mathrm{V})}{U_Z - 0{,}5\,\mathrm{V}}\right) = 2RC \cdot \ln 2$.

Je vidět, že T se se změnou U_Z prakticky nemění. To znamená, že perioda by téměř neměla záviset na napájecím napětí. Ještě zajímavější je, že měření tuto teoretickou předpověď potvrzuje.[11]

Proč funguje jednoduchý výpočet s „průměrným proudem“

Napětí na rezistoru R klesá s časem exponenciálně podle vztahu (10). Stejně proto klesá i proud tekoucí rezistorem[12]: $i(t) = i_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$.

Pro další výpočty označíme

$$RC \stackrel{\text{ozn.}}{=} \tau \quad ^{13} , \tag{22}$$

takže

$$i(t) = i_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Proud na začátku je $i(0) = i_0$. Proud v čase t_{konc} je $i(t_{\text{konc}}) = i_0 \cdot e^{-\frac{t_{\text{konc}}}{\tau}}$.[14] Aritmetický průměr obou hodnot je

$$i_{\text{průměrný}} = \frac{1}{2}\left(i_0 + i_0 \cdot e^{-\frac{t_{\text{konc}}}{\tau}}\right) = i_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + e^{-\frac{t_{\text{konc}}}{\tau}}\right) . \tag{23}$$

Z tohoto průměrného proudu jsme počítali *přibližnou* hodnotu periody, označme ji $T_{\text{přibliž.}}$. Počítali jsme ji z celkového náboje *Q*, který protekl kondenzátorem, viz (5). Dosazení (23) dává

$$Q = i_{\text{průměrný}} \cdot \frac{T_{\text{přibliž.}}}{2} = \frac{T_{\text{přibliž.}}}{2} \cdot i_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + e^{-\frac{t_{\text{konc}}}{\tau}}\right) . \tag{24}$$

Náboj *Q*, který skutečně protekl kondenzátorem v intervalu 0 až t_{konc}, když se proud s časem mění, můžeme spočítat integrací proudu podle času:

$$Q = \int_0^{t_{\text{konc}}} i(t)\,dt = i_0 \cdot \int_0^{t_{\text{konc}}} e^{-\frac{t}{\tau}}\,dt = i_0 \cdot \left[-\tau \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^{t_{\text{konc}}} = i_0 \cdot \tau \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_{\text{konc}}}{\tau}}\right) . \tag{25}$$

Propojením (24) a (25) dostáváme

$$\frac{T_{\text{přibliž.}}}{4} \cdot i_0 \cdot \left(1 + e^{-\frac{t_{\text{konc}}}{\tau}}\right) = i_0 \cdot \tau \cdot \left(1 - e^{-\frac{t_{\text{konc}}}{\tau}}\right) .$$

---

[11] Při změně napětí od 3 V do 11 V se perioda nezměnila o více než 2 % a i snížení napájecího napětí na 0,9 V způsobilo zkrácení periody jen asi o 4 %.

[12] Tento proud teče do kondenzátoru.

[13] τ se nazývá *časová konstanta*.

[14] t_{konc} je skutečný čas do přepnutí multivibrátoru, tedy polovina skutečné (přesně spočtené) periody T.

Odtud

$$\frac{T_{\text{přibliž.}}}{4\tau} = \frac{1-e^{-\frac{t_{\text{konc}}}{\tau}}}{1+e^{-\frac{t_{\text{konc}}}{\tau}}} = \frac{e^{\frac{t_{\text{konc}}}{2\tau}} - e^{-\frac{t_{\text{konc}}}{2\tau}}}{e^{\frac{t_{\text{konc}}}{2\tau}} + e^{-\frac{t_{\text{konc}}}{2\tau}}} = \operatorname{tgh}\left(\frac{t_{\text{konc}}}{2\tau}\right). \tag{26}$$

Zde tgh je hyperbolický tangens.[15] t_{konc} je polovina periody, $t_{\text{konc}} = T/2$, takže (26) je

$$\frac{T_{\text{přibliž.}}}{4\tau} = \operatorname{tgh}\left(\frac{T}{4\tau}\right). \tag{27}$$

Pro malé hodnoty argumentu, $|x| \ll 1$, platí $\operatorname{tgh}(x) \doteq x$. Je-li tedy $T/(4\tau)$ malé, můžeme z (27) usoudit, že $T_{\text{přibliž.}} \doteq T$. Konkrétně z (13) vidíme, že perioda je přibližně $1{,}4\,\tau$. Podívejme se tedy, jak se liší $T_{\text{přibliž.}}$ a T pro $T = 1{,}4\,\tau$.

Pro tuto periodu je $\frac{T}{4\tau} \doteq \frac{1{,}4}{4} = 0{,}35$. Platí[16] $\operatorname{tgh}(0{,}35) \doteq 0{,}3363755$. Z (27) pak vyjde $T_{\text{přibliž.}} \doteq 1{,}3455\,\tau$. Relativní rozdíl T a $T_{\text{přibliž.}}$ je asi 0,055 τ, činí tedy necelá 4 % periody. Pro kratší periody (pro multivibrátor s LED) je rozdíl ještě menší.

Vidíme, že přibližná metoda určení periody popsaná výše dává docela rozumné výsledky.

Závěr

Přibližné hodnoty periody kmitů multivibrátoru jsou:

- Pro multivibrátor bez LED:

$$T \doteq 1{,}4\,RC$$

- Pro multivibrátor (s červenými LED a napětím zdroje 9 V):

$$T \doteq 1{,}2\,RC$$

Pro multivibrátor bez LED se perioda téměř nemění s napětím zdroje (od napětí asi 1 až 2 V). Pro multivibrátor s LEDkami v kolektorech je při nižším napětí zdroje perioda kratší; určíme ji podle vztahu (21). Například pro červené LED a napětí zdroje 5 V je $T \doteq 1{,}0\,RC$. Použijeme-li modré LED, je na nich vyšší úbytek napětí (asi 3 V), a pokles periody je výraznější.

Přibližný jednoduchý výpočet, ať už jde o multivibrátor bez LED nebo s nimi, dává oproti výpočtu využívajícímu diferenciální rovnice hodnoty period s chybou jen asi 4 %, případně i méně.

[15] $\operatorname{tgh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

[16] Jak zjistíme na lepší kalkulačce nebo třeba na Wolfram Alpha.