Další nápady z Malé Hraštice: Jáma a kyvadlo

LEOŠ DVOŘÁK
Katedra didaktiky fyziky MFF UK, Praha

Kyvadlo je ve fyzice užitečným nástrojem už minimálně od dob Galilea Galileiho. O klasickém „školním“ vzorečku se uvádí, že platí do amplitudy kyvu 5 stupňů. Ukážeme, že i s jednoduchými pomůckami lze zkoumat, jak je tomu pro větší amplitudy. Příspěvek doplňuje několik námětů na další pokusy související s kyvadlem.

Úvod

O námětech z jarních soustředění pro budoucí učitele fyziky pořádaných MFF UK informovalo už několik příspěvků na Veletrhu nápadů, viz např. [1]. Hlavní téma letošního soustředění bylo „Časem i nečasem“. Kyvadlo s časem souvisí, byla tedy příležitost vyzkoušet, jak je to s kmity kyvadla, třeba právě s velkým rozkyvem.

Název příspěvku, jak je asi zřejmé, je inspirován známou povídkou Edgara Alana Poea [2]. (Jakmile mne název napadl, nedalo se mu odolat.) Najít fyzikální souvislost kyvadla s jámou byl trochu oříšek, pokud jsem nechtěl mluvit o potenciálové jámě, ale i to se nakonec podařilo. Předem ale raději upozorním, že tato část je „méně seriózním bonusem na konec“; hlavní část příspěvku se týká periody kmitů kyvadla.

Kyvadlo: trocha teorie

Vzorec pro periodu kmitů matematického kyvadla s malým rozkyvem se uvádí i ve středoškolských učebnicích: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Zdůrazňuje se přitom, že perioda nezávisí na amplitudě kmitů. Jak je tomu ale pro větší výchylky? Kmitání pak přestává být harmonické a perioda s rostoucí amplitudou vzrůstá, ovšem nelineárně.

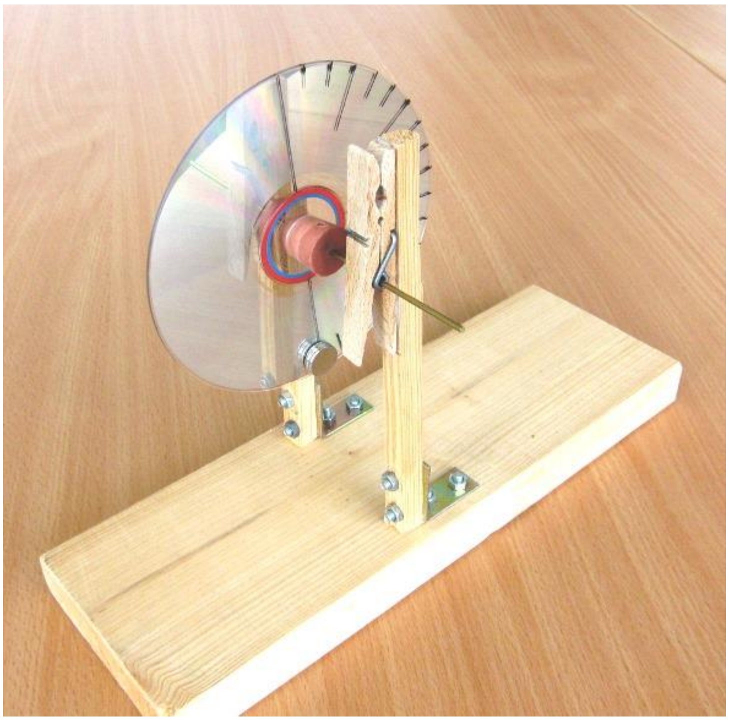
Výsledek lze najít ve vysokoškolských učebnicích (např. ve [2] na s. 411 až 414): $T = T_0 \frac{2}{\pi} K\left(\sin\frac{\alpha_{\max}}{2}\right)$, kde $\alpha_{\max}$ je maximální výchylka kyvadla a $K(k)$ je *úplný eliptický integrál prvního druhu*. (Při pohledu na tohle konstatování se člověku maně vybaví citát ze Sherlocka Holmese: „*Vždyť je to tak prosté, milý Watsone!*“)

Vidíme, že příslušná teorie zřejmě „poněkud přesahuje“ úroveň základní či střední školy, takže věnovat se jí ve výuce fyziky na daných školách asi nejde. Možnost, že by jí vysokoškolsky vzdělaný fyzikář mohl středoškoláky alespoň oslňovat (tedy, řečeno na rovinu, vytahovat se její znalostí), také asi není příliš reálná. Jednak by se učitel neměl nad žáky vytahovat, jednak by to většinu žáků asi nechalo zcela chladnými a navíc – to malé procento žáků, které by to zaujalo, si příslušný vzorec může nechat bez problémů spočítat na webu v systému WolframAlpha [4]. ☺

(Poznámka pro ty, kdo by to chtěli zkusit: Pozor, ve WolframAlpha použijte vztah $T = T_0 \frac{2}{\pi} K\left(\sin^2\frac{\alpha_{\max}}{2}\right)$. Značení eliptického integrálu totiž není jednoznačné, stejným symbolem $K()$ se označují v různých pramenech dvě různé funkce. Formálně bychom mohli napsat $K_{\mathrm{Brdička,Hladík}}(k) = K_{\mathrm{WolframAlpha}}(k^2)$.)

Kyvadlo: větší výchylky prakticky

Při výchylce 60º je perioda kyvadla oproti malým rozkyvům delší jen asi o 7 %, při výchylce 90º pak o 18 %. Aby bylo prodloužení periody dostatečně výrazné, potřebujeme zřejmě výchylky přes devadesát stupňů. Pak nám ovšem nestačí závaží zavěšené na provázku. Realizovat tuhý závěs se zanedbatelnou hmotností by bylo problematické, je tedy rozumné užívat fyzické kyvadlo. Jednoduchou konstrukci vyrobenou na jarním soustředění ukazuje obr. 1.



Obr. 1. Jednoduchá konstrukce kyvadla s velkým rozkyvem

Kyvadlem je CD naražené na gumovou zátku vhodného průměru. Zátka je provrtána a je jí prostrčena tenká mosazná tyčinka, která slouží jako osa. Pro „ložiska“ byly využity dřevěné kolíčky na prádlo – v jejich pružinkách se osa otáčí. Na CD jsou na okraji „přicvaknuty“ dva malé neodymové magnety. Jejich posouváním lze měnit vzdálenost těžiště kyvadla od osy (a samozřejmě i moment setrvačnosti).

Tření osy v ložiskách bohužel není zanedbatelné; kyvadlo z maximální výchylky udělá jen asi třicet kmitů. Namazání „ložisek“ olejem na šicí stroje nepřineslo prakticky žádné zlepšení. Amplituda kmitů tedy rychle klesá, přesto lze naši konstrukci alespoň pro přibližné měření použít.

Jak snímat a analyzovat kmity

Měřit periodu stopkami je značně nepřesné, neboť doba kmitu je jen asi 0,85 s. Protože se v kyvadle pohybují magnety, lze použít malou cívku (stačí několik závitů zvonkového drátu) a napětí indukované při pohybu magnetu přivést na mikrofonní vstup notebooku. Výsledný signál lze nahrát programem Audacity a změřit časy, kdy magnet míjel cívku. Měření časů je dost přesné, ovšem chybí informace o velikosti rozkyvu. Proto byl nakonec pohyb kyvadla natočen na video a to pak bylo analyzováno.

Na soustředění bylo video natočeno nejprimitivnějším způsobem: na tablet držený v ruce a opřený o stůl. Výsledný záznam byl analyzován ve volně dostupném programu *VLC Media Player* [5] doplněném o plugin *Jump to time* [6]. V tomto SW můžeme v záznamu krokovat o snímek a měřit přesný čas daného snímku.

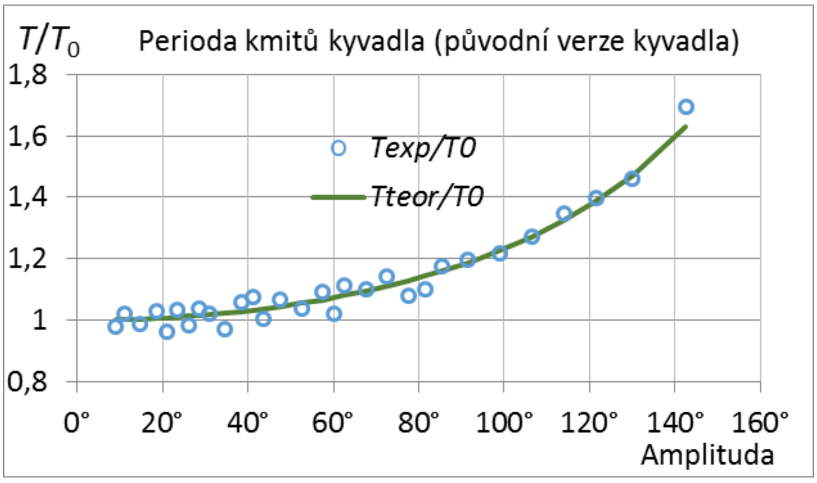
Při první analýze natočeného videa byly měřeny časy, v nichž má kyvadlo maximální výchylky. (Obvykle je přesnější měřit časy průchodů kyvadla „dolní úvratí“, ale při snímkové frekvenci 30 snímků/s je obraz kyvadla při průchodu minimem rozmazán.)

S čím měřené výsledky srovnat

Teoretický výpočet periody kmitu kyvadla s velkým rozkyvem lze provést výrazně jednodušeji, než bylo uvedeno výše. Článek [7] prezentuje metodu, pomocí níž lze periodu počítat třeba v Excelu. Nebudeme zde uvádět zdůvodnění, jen samotný algoritmus výpočtu: Označíme $a_0 = 1, b_0 = \cos(\alpha_{\max}/2)$ a pak z daných veličin spočteme aritmetický a geometrický průměr: $a_1 = (a_0 + b_0)/2$, $b_1 = \sqrt{a_0 \cdot b_0}$. Stejně postupujeme v dalších krocích: $a_2 = (a_1 + b_1)/2$, $b_2 = \sqrt{a_1 \cdot b_1}$ a tak dále. Veličiny a a b k sobě velmi rychle konvergují, po čtyřech iteracích se pro α_{max}<170º liší o méně než 10^{-8}. Označíme-li limitu a_∞, je perioda kyvadla $T = T_0/a_\infty$.

Srovnání výsledků pokusu s teorií

Srovnání naměřených výsledků s teoretickou předpovědí ukazuje obr. 2.



Obr. 2. Perioda kmitů první verze kyvadla

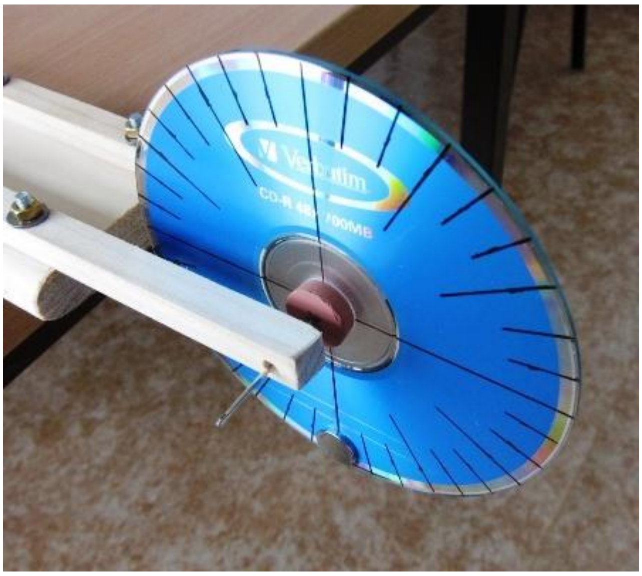
Je vidět, že přes značnou jednoduchost konstrukce kyvadla dávají měření výsledky, které jsou až v překvapivém souladu s teorií. Zejména při menších výchylkách kyvadla ale zjevně chyby měření činí odhadem 5 % i víc.

Pro přesnější a průkaznější měření je ovšem třeba konstrukci vylepšit, zejména zmenšit tření.

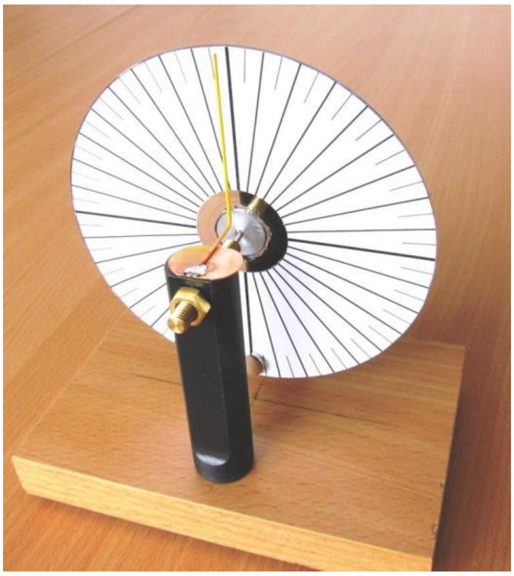
Vylepšené verze kyvadla

Následně vznikly dvě vylepšené verze kyvadla. Jedna stále velmi amatérská, při jejím zhotovení vystačíme s vrtačkou. CD je opět naraženo na gumovou zátku, viz obr. 3. Osičkou je silnější jehla pro práci s kůží, ložisky jsou malé korálky. Tření v ose je v této konstrukci o poněkud menší, kyvadlo do zastavení kmitne více než padesátkrát.

Druhou vylepšenou konstrukci vytvořil ing. Ludvík Němec z KDF MFF UK, viz obr. 4. Osička z modelů vláčků se v ní otáčí v hrotových ložiskách (také z modelů, obě části byly koupeny jako náhradní díly). V této konstrukci je tření výrazně menší, kyvadlo do zastavení udělá až čtyři sta kmitů.



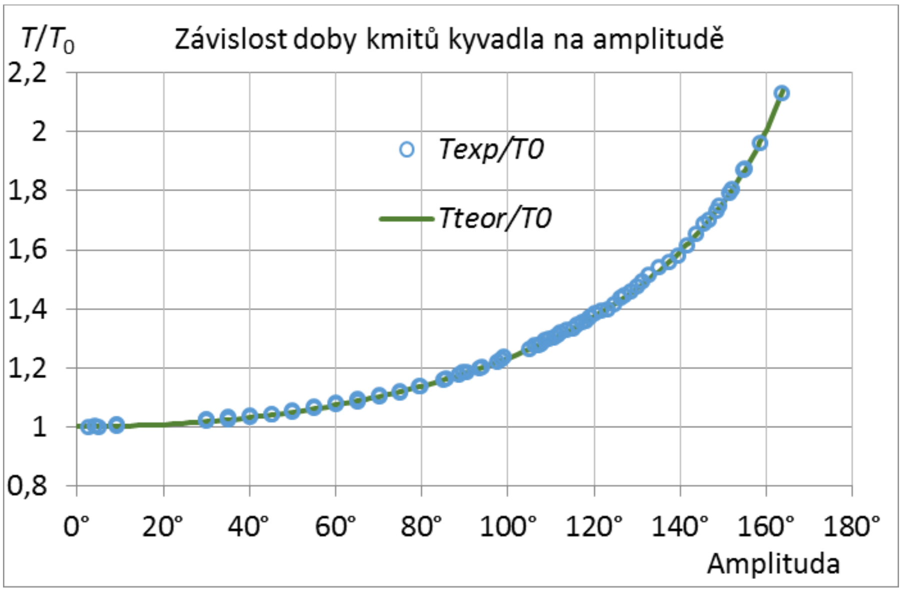
Obr. 3. Vylepšená verze kyvadla



Obr. 4. „Profi“ verze

Pohyb obou kyvadel byl nahrán jako vysokorychlostní video fotoaparátem Casio Exilim EX-FH 20 při snímkové frekvenci 210 snímků/s a následně analyzován opět v softwaru VLC Media Player. Měřeny byly časy průchodů kyvadla „dolní úvratí“. Přesnost měření časů můžeme odhadnout na asi 3 ms, přesnost odečítání amplitud na zhruba 1°.

Výsledky pro nejlepší („profi“) verzi kyvadla ukazuje obr. 5; naměřené výsledky se většinou neodchylují od teoretických o více než půl procenta, maximální odchylka činila asi 0,8 %. I měření na verzi kyvadla podle obr. 3 ale dává dobré výsledky, odchylka naměřených period oproti teoretickým hodnotám nepřesahuje 2 % a většinou se pohybuje v desetinách procenta.



Obr. 5. Srovnání naměřených a teoretických period kmitů kyvadla (pro verzi kyvadla z obr. 4)

Prodloužení periody kmitů při vyšším rozkyvu a to, že odpovídá teorii, lze tedy ilustrovat a měřit dostatečně přesvědčivě; přitom jednodušší konstrukce by mohli zhotovit i sami žáci, třeba v rámci různých projektů. Další možností využití vytvořených kyvadel je ukazovat závislost periody na momentu setrvačnosti (přidáváním dalších magnetů na CD) nebo závislost periody na tíhovém zrychlení – při naklonění osy kyvadla (tzv. Machovo kyvadlo).

Jáma a kyvadlo

A na závěr něco k možné fyzikální souvislosti jámy a kyvadla. Dokonce bychom s trochou nadsázky mohli říci „jáma *je* kyvadlo“. Necháme-li v jámě kulového tvaru koulet kuličku sem a tam, koná (při malých rozkmitech) harmonické kmity. Z teorie lze odvodit, že perioda kmitů je $T_0 = 2\pi\sqrt{(7/5)(R/g)}$, kde R je poloměr kulové plochy (resp. přesněji rozdíl poloměru kulové plochy a poloměru kuličky). Můžeme tak třeba poněkud nezvyklým způsobem měřit poloměr křivosti dutého zrcadla a porovnat ho s tím, co vyjde z optického měření. Pro levné kosmetické zrcátko (u něhož byl dost problém určit ohnisko) se výsledky shodovaly lépe než na 10 %.

Poděkování

Děkuji RNDr. Zdeňce Koupilové, Ph.D. a Mgr. Petru Kácovskému, Ph.D. z KDF MFF UK, kteří se uvolili převzít organizaci a vedení hraštického soustředění (takže já jsem se na něm už nemusel o nic starat a mohl jsem se koncentrovat na hraní si s fyzikou). Soustředění bylo finančně podpořeno z nadačního příspěvku Nadace Depositum Bonum a z prostředků Institucionálního rozvojového plánu MŠMT pro UK. Ing. Ludvíku Němcovi děkuji za zhotovení vylepšené verze kyvadla.

Literatura

[1] Dvořák, L. *Další nápady z Malé Hraštice 5: Jak silné jsou magnety?*“. In: Sborník konference Veletrh nápadů učitelů fyziky 20. Ed. V. Koudelková, P3K, Praha 2016. s. 58-63.

[2] Poe, E. A. *The pit and the pendulum*. In: The Gift: A Christmas and New Year's Present for 1843. Carey & Hart, 1842. (Údaj z Wikipedie, dostupný online na https://en.wikipedia.org/wiki/The_Pit_and_the_Pendulum. Daný almanach je nabízen na webu Amazonu.) Český překlad Jáma a kyvadlo vyšel zřejmě v řadě povídkových sbírek a je dostupný i na internetu.

[3] Brdička, M., Hladík, A. *Teoretická mechanika*. Academia, Praha, 1987.

[4] *WolframAlpha*. Dostupné z: https://www.wolframalpha.com/ . Cit. 24. 8. 2016.

[5] *VideoLAN: VLC media player*. Dostupné z: http://www.videolan.org/vlc/ . Cit. 24. 8. 2016.

[6] Jump to time (Previous frame) v2.1. Dostupné z: http://addons.videolan.org/content/show.php/Jump+to+time+%28Previous+frame%29+v2.1?content=156396 . Cit. 24. 8. 2016.

[7] Carvalhaes, C. G., Suppes, P. *Approximations for the period of the simple pendulum based on the arithmetic-geometric mean*. Am. J. Phys. 76 (Dec. 2008), 1150-1154.