

## Síly působící na matematické kyvadlo na $7 + 1$ způsob

VOJTĚCH ŽÁK

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze

### Úvod

Kyvadlo patří k tématům, se kterými se můžeme setkat ve výuce fyziky jak na základních, tak středních školách, a to přesto, že v obecných kurikulárních dokumentech – rámcových vzdělávacích programech [1] a [2] explicitně kyvadlo v rámci učiva uvedeno není. Na druhou stranu v učebnicích fyziky kyvadlo tematizováno bývá (kromě současných českých učebnic také např. v jedné z nejstarších česky psaných učebnic [3, s. 68–71]. Zvláštní pozornost bývá věnována tzv. matematickému kyvadlu, tj. hmotnému bodu upevněnému na konci tuhého vlákna, které má konstantní délku a zanedbatelnou hmotnost, a na které nepůsobí žádné disipativní síly, např. [4, s. 104].<sup>1</sup>

Přestože je matematické kyvadlo tématem tradičním a fyzikou jako vědou dostatečně podrobně zvládnutým, objevují se různé zkreslené představy o něm a jeho pohybu. Typická chybná představa o silách působících na kuličku zavěšenou na niti je uvedena v [5, s. 19 a 81]. Ukázalo se, že mnozí čeští studenti dokončující studium učitelství fyziky měli chybnou představu spočívající v tom, že při průchodu rovnovážnou polohou působí na kuličku nenulová síla ve směru tečny k příslušné kružnicové trajektorii [5, s. 19].<sup>2</sup> V českém prostředí je na problémy s úvahou o silách působících

<sup>1</sup>V charakteristice by se dalo pokračovat dále, např. kyvadlo se pohybuje v homogenním tíhovém poli a s počáteční nulovou rychlostí.

<sup>2</sup>Tento výzkum byl proveden v 80. letech 20. století.

na závaží matematického kyvadla upozorněno také např. v [6, s. 346], kde je uveden mimo jiné neadekvátní silový diagram objevující se v učebnicích fyziky.<sup>3</sup>

Vzhledem k tomu, že matematické kyvadlo je stále v kurikulu české střední školy tematizováno a přitom existují poznatky, že problematické momenty vztahující se k silám působícím na závaží kyvadla se objevují jak u studentů, tak u jejich učitelů a také zřejmě v učebnicích fyziky, vznikla tato studie. Jejím cílem je:

- podat přehled diagramů sil působících na závaží matematického kyvadla a diskutovat jejich adekvátnost;
- navrhnout silový diagram, který je adekvátní.

Studie má tedy dvě části – výzkumnou a vývojovou. K první z nich se vztahuje následující výzkumná otázka: *Které síly, jakého směru a jaké relativní velikosti jsou v českých učebnicích (a obdobných textech) zobrazeny v silovém diagramu závaží matematického kyvadla?*

Studie je určena zejména učitelům fyziky na středních školách, kteří do své výuky zařazují matematické kyvadlo (dále jen: kyvadlo). Je také cílena na žáky středních škol a to jak zprostředkovaně přes jejich učitele fyziky, tak přímo, zejména v případě žáků usilujících proniknout hlouběji do dynamiky hmotného bodu. Tento text (spolu s obrázky) má ambici být alternativou k úvahám o silách působících na závaží kyvadla, které jsou prezentovány v česky psaných učebnicových textech. Text je členěn tak, že v kapitole *Metodologie* je uvedeno, které učebnice a jakým způsobem byly analyzovány, a ve *Výsledcích analýzy* jsou stručně prezentovány jednotlivé silové diagramy (jejich typy a varianty) a to včetně obrázků. Následná *Diskuze*, která se zabývá (ne)adekvátnostmi v identifikovaných silových diagramech, vyúsťuje v *Návrh silového diagramu*, který má být adekvátní alternativou k diagramům zjištěným při analýze.

## Metodologie

Jako metoda sběru dat byla použita analýza tištěných učebnic a dalších textů obdobného charakteru.<sup>4</sup> Analyzovány byly učebnice a další texty,

<sup>3</sup>Také v mezinárodním prostředí se objevují články týkající se problémů s matematickým kyvadlem ve výuce. Např. byla identifikována častá miskoncepce, že normálová složka tíhové síly se vyruší tahovou silou vlákna [7, s. 977]. Výzkumných nálezů v mezinárodním prostředí je pochopitelně více a vydaly by zřejmě na samostatnou studii.

<sup>4</sup>Elektronické texty do analýzy zahrnuty nebyly, ačkoliv je zřejmé, že jsou díky dostupnosti často využívány jak žáky, tak učiteli.

u kterých je pravděpodobné, že je žáci a učitelé využívají při přípravě na výuku fyziky. Jedná se v první řadě o současné české středoškolské učebnice fyziky – osmidílnou učebnici pro gymnázia (konkrétně díl *Mechanické kmitání a vlnění* [8], resp. dřívější vydání [9], dvojdílnou učebnici pro SŠ (její první díl [10]), jednodílnou učebnici pro netechnické obory [11] a dále *Přehled středoškolské fyziky* [12], resp. [13, 14]. Dále byla analyzována kniha, která je v současné době k dispozici speciálně učitelům k přípravě jejich výuky, *Příručka pro učitele fyziky na střední škole* [15]. Do analýzy byly zahrnuty ale i další dostupné a využívané zdroje, jednak české vydání známé zahraniční vysokoškolské učebnice fyziky autorů Hallidaye, Resnicka, Walkera [16], resp. [17], jednak starší učebnice [18, 19] a texty určené spíše k rychlému opakování [20, 21]. Domníváme se, že tyto učebnice představují široký výběr tištěných zdrojů obsahu středoškolské fyziky, které jsou v současné době k dispozici, a tudíž považujeme výběr učebnic a jim podobných textů za reprezentativní. Analýza se zaměřila speciálně na silové diagramy znázorňující matematické kyvadlo. Hlavní pozornost byla věnována tomu, které síly a jakým způsobem (směr a relativní velikost) jsou v nich zobrazeny. Protože bylo zkoumáno zejména to, které různé silové diagramy se v učebnicích objevují, zatímco otázka, jak často se v učebnicích různé silové diagramy objevují, řešena nebyla, můžeme tuto analýzu označit jako kvalitativní výzkum. Další postup, který následuje po analýze silových diagramů, byl již uveden na konci předchozí, úvodní, části.

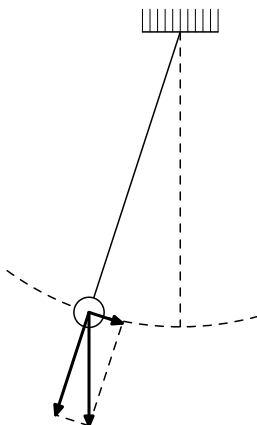
## Výsledky analýzy

V následujícím přehledu uvádíme různé silové diagramy, které byly v analyzovaných textech v tématu matematické kyvadlo identifikovány. Podobné diagramy byly sdruženy do několika typů, příp. jejich variant. Silové diagramy na uvedených obrázcích reprezentují jednotlivé typy, nejsou ale přesnými kopiemi diagramů v jednotlivých učebnicích; ukazují jen jejich důležité charakteristiky. V níže uvedeném přehledu jsou diagramy řazeny od jednodušších ke komplexnějším. Jejich podrobnější diskuze je pak uvedena v následující kapitole.

### *Tíhová síla a její složky*

Diagram sil působících na závaží matematického kyvadla, kde je zobrazena tíhová síla a její dvě složky – jedna působící ve směru vlákna (radiální neboli normálová složka) a druhá, která je k první složce kolmá (tedy je

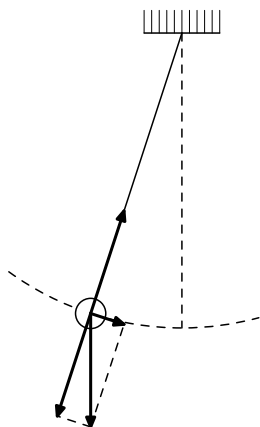
tečná k trajektorii), se objevuje v několika českých učebnicích [14, s. 205], [9, s. 32], [19, s. 129]; obr. 1.



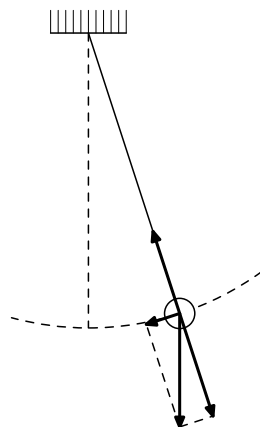
Obr. 1

### ***Tíhová síla, její složky a síla vlákna***

Diagram, kde na rozdíl od předchozího případu vystupuje tahová síla přenášená vláknem (dále: síla vlákna), je uveden v učebnici [17, s. 418] a [20, s. 95], kde síla vlákna má stejnou velikost jako radiální složka tíhové síly (obr. 2a), a v novějším vydání [16, s. 412], kde je tato síla znázorněna jako menší než radiální složka tíhové síly (obr. 2b).



Obr. 2a

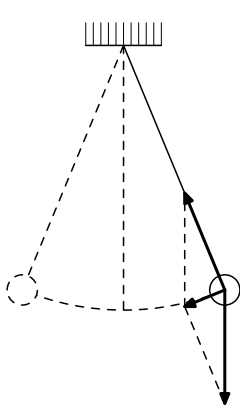


Obr. 2b

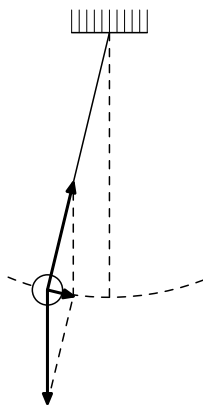
### *Tíhová síla, síla vlákna a jejich výslednice*

V česky psaných učebnicích se také objevují silové digramy, kde je znázorněna tíhová síla (bez složek), síla vlákna a jejich výslednice, která je tečná k trajektorii závaží. Tento typ silového diagramu se vyskytuje v podstatě ve třech variantách.

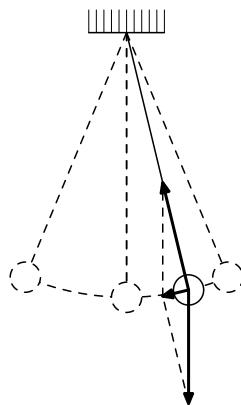
V první variantě (obr. 3a) se zdá, že je kyvadlo zakresleno v krajní poloze – [10, s. 123], [15, s. 153], [12, s. 230]. Ve druhé variantě (obr. 3b) je znázorněno matematické kyvadlo v poloze, u které není zřejmé, zda je, nebo není krajní – [11, s. 58]. Ve třetí variantě (obr. 3c) je kyvadlo zřetelně zakresleno mimo krajní polohu; je v obecné poloze – [13, s. 209], [8, s. 34].



Obr. 3a



Obr. 3b



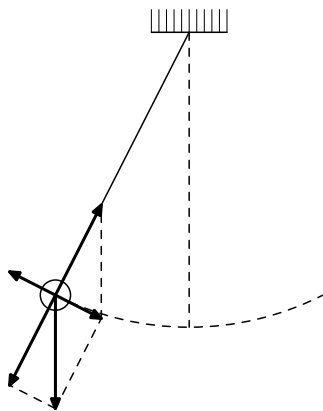
Obr. 3c

Ani tento výčet ovšem není úplný. Např. v knize [21, s. 78] je uveden silový diagram s tíhovou silou, silou vlákna, dále je zkonstruována jejich výslednice, nicméně tato výslednice je interpretována jako složka tíhové síly. V učebnici [18, s. 275–276] je uveden a znázorněn ještě jiný přístup (obr. 4); je zde silový diagram znázorňující závaží kyvadla v krajní poloze v klidu (tedy s nulovou výslednou silou) – oproti jiným diagramům je tu navíc znázorněna síla, kterou „kuličku vychýlíme do vzdálenosti  $y$  od rovnovážné polohy“ [18, s. 276].

### **Diskuze**

Je pozoruhodné, že diagram sil působících na závaží matematického kyvadla se v česky psaných učebnicích (a dalších učebnicových textech) objevuje (minimálně) v sedmi odlišných podobách. Postupně je projdeme

v pořadí, jak byly uvedeny v předchozí kapitole, a prodiskutujeme je z didakticko-fyzikálního hlediska.



Obr. 4

V silových diagramech, kde je znázorněna tíhová síla a její složky (radiální a tečná), je zobrazena podstatná síla, která je třeba v úvaze o periodě kyvadla při malých výchylkách – tečná, v případě malých úhlů navíc téměř vodorovná síla. Na druhou stranu je zřejmé, že tento silový diagram není kompletní. Pod vlivem zobrazených sil by se totiž závaží nepohybovalo po části kružnice. U zvědavějších studentů může tento silový diagram otázkou, proč v něm nejsou zobrazeny všechny síly působící na závaží kyvadla, oprávněně vyvolat.

Komplexnější přístup nabízí druhý typ silového diagramu, kde je oproti předcházejícímu znázorněna ještě navíc síla, která působí prostřednictvím vlákna na závaží kyvadla. Při doplnění síly vlákna do diagramu s tíhovou silou a jejími složkami vzniká ovšem otázka, jakou velikost vůči těmto silám má síla vlákna mít. Autoři učebnic na ni odpovídají různě. V učebnici [20, s. 95] a [17, s. 418] má síla vlákna stejnou velikost jako radiální složka tíhové síly, naproti tomu v novějším vydání téže učebnice [16, s. 412] je relativní velikost síly vlákna menší.<sup>5</sup> Velikosti sil, které na závaží kyvadla působí, můžeme sice považovat za ne zcela zásadní záležitost, nicméně pokud si někdo ze žáků položí otázku, jaký směr má výslednice zobrazených sil,<sup>6</sup> můžeme dojít k zajímavému závěru. V prvním uvedeném případě má

<sup>5</sup>Dodejme, že rozdíl ve velikosti sil (jejich zobrazení) je měřitelný běžným pravítkem, takže by nebylo vhodné ho jednoduše odbýt.

<sup>6</sup>Jako učitelé bychom měli být rádi, pokud si někdo ze žáků tuto otázku položí.

výslednice sil směř tečny ke kružnicovému oblouku, po kterém se závaží pohybuje, což je (jak budeme diskutovat dále) ve speciálním případě realistické. Pokud je ale síla vlákna menší než radiální složka tíhové síly, bude výslednice mířit směrem „ven z příslušné kružnice“, což ve skutečnosti nemůže nastat. Jestliže se totiž závaží kyvadla pohybuje (nenulovou rychlostí) po dané kružnici, musí mít výsledná síla, která na něj působí, nenulovou dostředivou složku, která tedy míří do středu (nikoli od středu) kružnice.

V některých silových diagramech je znázorněna tíhová síla, síla vlákna a dále jejich výslednice, která má ve všech těchto identifikovaných případech směr tečny k trajektorii závaží. Pokud je ze silového diagramu zřejmé, že je závaží znázorněno v krajní poloze (kde má nulovou rychlost), pak můžeme takové znázornění pokládat za adekvátní. V tomto případě je totiž dostředivá síla, přesněji řečeno dostředivá složka výsledné síly, nulová (díky nulové rychlosti), a výslednice má tedy směr tečny k trajektorii. Silové diagramy, které budí dojem, že závaží není v krajní poloze, příp. je z nich zcela zřejmé, že je závaží zachyceno v obecné poloze, musíme považovat za fyzikálně neadekvátní. Výslednice v tomto případě nemá směr tečny k trajektorii. Při průchodu rovnovážnou polohou je výsledná síla dokonce silou „čistě“ dostředivou.

## Návrh silového diagramu

Pokud jsme během analýzy silových diagramů v učebnicích identifikovali určité problematické momenty, považujeme za konstruktivní uvést vlastní návrh, jak silový diagram znázornit a diskutovat. Vytvoření silového diagramu by mělo podle našeho názoru sledovat jasnou myšlenku, která bude objasňovat jeho postupný vznik (ačkoliv výsledkem v tištěné knize je statický obrázek).

Hlavním problémem nalezených silových diagramů je fakt, že nedávají uspokojivou odpověď na otázku, jaká je (zejména jaký směr má) výslednice sil. V některých případech je sice výslednice zakreslena, ale správně pouze pro závaží v krajní poloze. Tento moment budeme brát jako výchozí při tvorbě diagramu a tím se vyhneme situaci, kdy by po složení jednotlivých sil vznikla nerealistická výslednice. Navrhujeme, aby konstrukce (náčrtek) silového diagramu probíhala tímto způsobem: *Na základě vlastností pohybu závaží kyvadla bude určen (alespoň kvalitativně) směr celkového zrychlení*

---

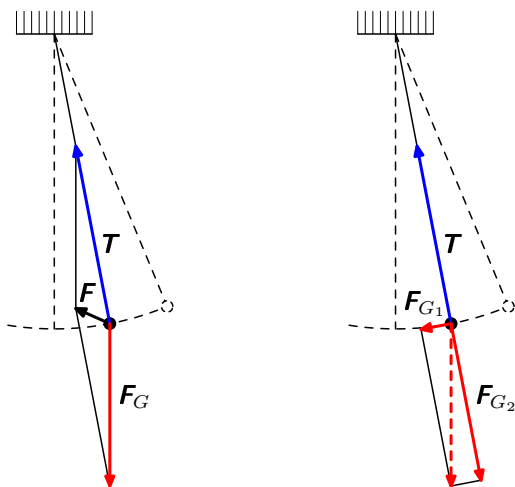
Vzpomeňme si, kolik času mnozí z nás skládání a rozkládání sil ve výuce fyziky věnují.

a podle 2. Newtonova pohybového zákona také směr výsledné síly. Ta bude následně rozložena do složek, které odpovídají působení okolních těles na závaží.

Je jasné, že se závaží kyvadla po vychýlení do krajní polohy a uvolnění z ní (počáteční rychlost je nulová) pohybuje po části kružnice. Závaží kyvadla má tedy ve všech bodech svojí trajektorie nenulové dostředivé (normálové) zrychlení (kromě krajních poloh, kdy má nulovou rychlost).

Dále je zřejmé, že se velikost rychlosti závaží při pohybu z krajní polohy do rovnovážné polohy zvětšuje a z rovnovážné polohy do druhé krajní polohy se symetricky velikost rychlosti zmenšuje. Závaží má tedy nenulové zrychlení ve směru pohybu (tj. tečné zrychlení), a to s výjimkou rovnovážné polohy, kde dosahuje rychlost maximální velikosti.

Celkové zrychlení závaží je tedy v obecné poloze (mimo krajní polohy a rovnovážnou polohu) tvořeno nenulovým tečným a nenulovým dostředivým zrychlením, tj. má směr „šikmo do vnitřní oblasti kružnice“. Stejný směr má podle 2. Newtonova pohybového zákona výsledná síla (označena  $\mathbf{F}$  v obr. 5 vlevo).



Obr. 5

Nyní je vhodné položit si otázku, která tělesa na závaží kyvadla působí. Je zřejmé, že je to jednak Země, která působí na závaží prostřednictvím tíhového pole, a tudíž na závaží působí tíhová síla (označena  $\mathbf{F}_G$  v obr. 5 vlevo). Závaží je ale zároveň připevněno na vlákně (niti, provázku apod.),



tj. působí síla přenášená vláknem (označena  $\mathbf{T}$ ; jedná se o tahovou sílu, kterou prostřednictvím vlákna na závaží působí bod úchyty, např. část stojanu, na kterém je kyvadlo upevněno). V souladu s těmito zjištěními rozložíme výslednici do svislého směru a do směru vlákna (zkonstruujeme příslušný rovnoběžník sil). Je zřejmé, že daná výslednice jde takto rozložit jednoznačným způsobem, tj. nevzniká diskuze (a případné dilema), jakou má mít síla přenášená vláknem velikost vůči tíhové síle apod.

Tíhovou sílu je dále vhodné rozložit do tečného a radiálního směru (složky  $\mathbf{F}_{G_1}$  a  $\mathbf{F}_{G_2}$  v obr. 5 vpravo). Pro další popis pohybu matematického kyvadla a zejména pro odvození vztahu pro jeho periodu má největší význam tečná složka tíhové síly, která je v případě kmitů s malou výchylkou téměř vodorovná a která bývá výstižně označována jako vratná síla [16, s. 412].<sup>7</sup>

## Závěr

V česky psaných učebnicích a dalších textech, které žáci a učitelé k přípravě na výuku fyziky využívají, se objevuje několik různých diagramů sil působících na závaží matematického kyvadla. Na výzkumnou otázku uvedenou v úvodu je možné odpovědět tak, že v silových diagramech je vždy zobrazována tíhová síla, která je někdy rozložena do tečné a radiální složky. V některých případech bývá zobrazena navíc síla vlákna (stejně velká nebo menší než radiální složka tíhové síly). Byly identifikovány také ale diagramy, kde je zobrazena tíhová síla (bez složek), síla vlákna a jejich výslednice, která je zobrazena v tečném směru ke kružnicové trajektorii.

Je tedy zřejmé, že silové diagramy jsou buď neúplné (není znázorněna některá z působících sil) nebo jsou síly znázorněny disproporčně (některá síla má neadekvátní velikost vůči ostatním). Fyzikální neadekvátnosti se v některých učebnicových textech objevují i v dalších jejich vydáních. V některých případech se v různých vydáních téhož titulu objevují různé silové diagramy. Žádný z analyzovaných silových diagramů neznázorňuje výslednici sil působící na závaží kyvadla v obecné poloze. Přitom otázka, jaká je výslednice sil (zejména otázka jejího směru), je relevantní.

---

<sup>7</sup> Je samozřejmě možné jít v úvaze o diskuzi do větších podrobností a provést odvození vztahu pro souřadnice výslednice sil (což umožní určit směr výslednice přesně). Kromě vztahu pro dostředivou sílu a zákona zachování mechanické energie je třeba využít již jen poměrně jednoduchou trigonometrii. Souřadnice výslednice kromě hmotnosti závaží a velikosti tíhového zrychlení závisí na počáteční a okamžité úhlové výchylce kyvadla. Zájemci mohou výsledek a jeho odvození diskutovat s autorem tohoto článku.

V tomto článku jsme uvedli jiný způsob diskuze a zobrazení sil působících na závaží matematického kyvadla. Výchozím bodem je zde poznatek, že závaží se po uvolnění z krajní polohy pohybuje po části kružnice (než se omezíme na malé výchylky), a to s rostoucí velikostí rychlosti (než se dostane do rovnovážné polohy); má tedy v obecné poloze nenulové normálové (dostředivé) a nenulové tečné zrychlení. Z toho vyplývá, že výsledná síla působící na závaží v obecné poloze má nenulovou dostředivou a nenulovou tečnou složku, tj. „míří šikmo do vnitřní oblasti kružnice“. Dále je možné přejít k pohybu při malých výchylkách a tečné síle, která je důležitá v odvození vztahu pro periodu matematického kyvadla.

Problematické z hlediska výuky na středních školách je, že zejména pojmu tečné zrychlení není věnována pozornost, s čímž souvisí, že diskuze pohybu po kružnici se zužuje na rovnoměrný pohyb. Je vůbec otázkou, zda rozbor sil působících na závaží matematického kyvadla do výuky fyziky na střední škole zařazovat. Tuto otázku nechme otevřenou a její odpověď přenechejme mimo jiné tvůrcům učebnic. Tento článek ovšem reaguje na situaci, že v učebnicích a obdobných textech silové diagramy matematického kyvadla bývají uvedeny, a snaží se učitelům a žákům zprostředkovat ucelenější pohled na tento problém. Nakonec uveďme, že nepovažujeme za vhodné na základě zobrazení jednoho určitého silového diagramu (a jeho případné neadekvátnosti) usuzovat na kvalitu příslušných učebnic (a dalších textů) jako celku.

## Literatura

- [1] RVP ZV. Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (verze platná od 1. 9. 2013). MŠMT, Praha, 2013.
- [2] RVP G. Rámcový vzdělávací program pro gymnázia. Výzkumný ústav pedagogický v Praze, Praha, 2007.
- [3] *Smetana, F. J.*: Počátkové silozpytu čili fysiky pro nižší gymnasia a reálky. Kněhkupectví J. G. Calve, Praha, 1852.
- [4] *Mechlová, E., Košťál, K. a kol.*: Výkladový slovník fyziky pro základní vysokoškolský kurz. Prometheus, Praha, 1999.
- [5] *Mandíková, D., Trna, J.*: Žákovské prekoncepce ve výuce fyziky. Paido, Brno, 2011.
- [6] *Musilová, J.*: Fyzikální omyly ve výuce mechaniky. Československý časopis pro fyziku, roč. 62 (2012), č. 5–6, s. 346–357.
- [7] *Campanario, J. M.*: Using textbook errors to teach physics: examples of specific activities. European Journal of Physics, roč. 27 (2006), s. 975–981.
- [8] *Lepil, O.*: Fyzika pro gymnázia: Mechanické kmitání a vlnění (dotisk 4. vyd.). Prometheus, Praha, 2001.

- [9] *Lepil, O.*: Fyzika pro gymnázia: Mechanické kmitání a vlnění. Prometheus, Praha, 1994.
- [10] *Lepil, O., Bednařík, M., Hýblová, R.*: Fyzika pro střední školy I (5. přeprac. vyd.). Prometheus, Praha, 2014.
- [11] *Štoll, I.*: Fyzika pro netechnické obory SOŠ a SOU. Prometheus, Praha, 2001.
- [12] *Svoboda, E., Bartuška, K., Bednařík, M., Lepil, O., Šíroká, M.*: Přehled středoškolské fyziky (5. přeprac. vyd.). Prometheus, Praha, 2014.
- [13] *Svoboda, E., Bartuška, K., Bednařík, M., Lepil, O., Šíroká, M.*: Přehled středoškolské fyziky (4. uprav. vyd.). Prometheus, Praha, 2006.
- [14] *Svoboda, E., Bartuška, K., Bednařík, M., Lepil, O., Šíroká, M.*: Přehled středoškolské fyziky (3. vyd.). Prometheus, Praha, 1998.
- [15] *Lepil, O., Svoboda, E.*: Příručka pro učitele fyziky na střední škole. Prometheus, Praha, 2007.
- [16] *Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.*: Fyzika 1 (2. přeprac. vyd.). VUTIUM, Brno, 2013.
- [17] *Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.*: Fyzika. Vysokoškolská učebnice obecné fyziky. Část 2: Mechanika – Termodynamika. VUTIUM, Brno & Prometheus, Praha, 2000.
- [18] *Lepil, O., Houdek, V., Pecho, A.*: Fyzika pro III. ročník gymnázií (1. vyd.). SPN, Praha, 1986.
- [19] *Urgošák, B.*: Fyzika (2. uprav. vyd.). SNTL, Práce, Praha, 1987.
- [20] *Tarábek, P., Červinková, P. a kol.*: Odmaturuj z fyziky (2. vyd.). Didaktis, Brno, 2006.
- [21] *Lank, V., Vondra, M.*: Fyzika v kostce pro SŠ. Fragment, Praha, 2007.

# Poznámka k silám působícím na kyvadlo

OLDŘICH LEPIL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Příspěvek V. Žáka [I] je analýzou metodických postupů při interpretaci sil, které působí na (matematické) kyvadlo. Poněvadž předmětem analýzy jsou i učební texty, na nichž jsem se autorsky podílel [8–10, 12–15, 18],<sup>1</sup> vyjádřím se k problematice učiva o kyvadle obsáhleji. Především je třeba

---

<sup>1</sup>Čísla odkazů v textu odpovídají citacím literatury v příspěvku V. Žáka [I]. Pro přehlednost jsou odkazy na literaturu v tomto příspěvku označeny římskými číslicemi.