

SOUSTŘEDĚNÍ MLADÝCH FYZIKŮ A MATEMATIKŮ
Fourierovy řady – program pro aproximaci pomocí
kružnic – dokumentace

Autor: Jan Benda

Vedoucí práce: Jakub Hofman

Plasnice

14. - 28. 7. 2018

Anotace

Tato dokumentace se zabývá užitím Fourierových řad v programu pro aproximaci křivky pomocí kružnic. Práce obsahuje matematické vysvětlení a popis funkce programu.

Úvod práce

Práci jsem si vybral, protože jsem se o Fourierovu analýzu nedávno zajímal a chtěl jsem vytvořit program pro aproximaci pomocí kružnic. Zároveň se zajímám o matematiku a fyziku a jsem otevřen vůči jakýmkoliv poznatkům z těchto oborů. V této dokumentaci se zaměřím převážně na již zmíněný program a teorii nutnou k pochopení jeho chodu.

Teoretická část

Nejprve vysvětlím, proč se program jmenuje právě „pro aproximaci pomocí kružnic“. Program aproximuje periodickou komplexní funkci $f(x)$ s reálným argumentem x , která po zakreslení do Gaussovy roviny vytvoří uzavřenou křivku, kterou program bude aproximovat. Aproximace probíhá pomocí komplexní Fourierovy řady ve tvaru

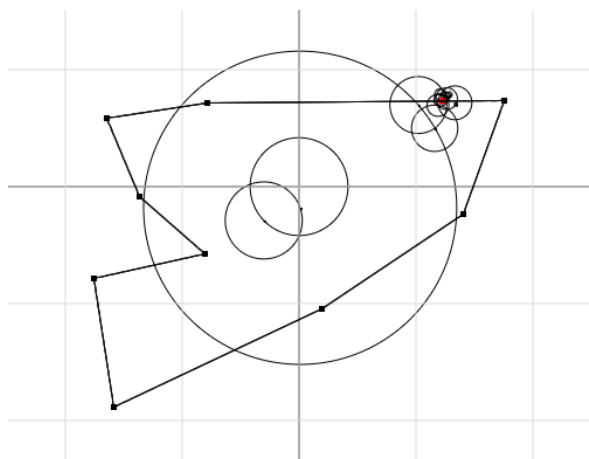
$$f(x) \approx \sum_{n \in \mathbb{Z}} z_n e^{inx}, \quad z_n \in \mathbb{C},$$

kde koeficient z_n je n -tý koeficient Fourierovy řady a počítá se následovně (odvození je uvedeno v prezentaci)

$$z_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-itn} dx.$$

Pokud se zaměříme na uvedenou sumu, lze o ní prohlásit, že všechny její členy jsou v Gaussově rovině pouze kružnice s poloměrem $|z_n|$, pootočené o $\arg(z_n)$ radiánů. Zároveň člen n v exponentu způsobí rychlejší změnu exponentu a tudíž se daná kružnice vykreslí n -krát za danou periodu. Jinými slovy lze o tomto členu uvažovat jako o frekvenci otáčení dané kružnice.

Nyní se zaměříme na výsledek oné sumy. Posčítání všech členů způsobí, že se středy kružnic posunou tak, aby střed n -té kružnice byl na $(n-1)$. kružnici (viz obrázek 1), přičemž první kružnice má střed v nule. Vzhledem k tomu, že poloměr $|z_n|$ má tendenci se s rostoucím n zmenšovat (pro $n \rightarrow \infty$ je $|z_n| = 0$) dostatečně rychle, dochází k aproximaci.

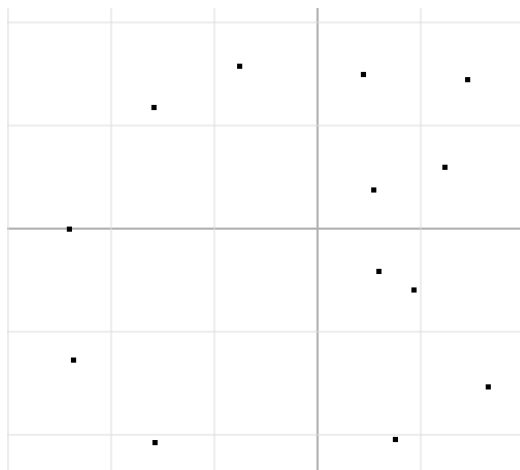


Obrázek 1

Praktická část – popis programu

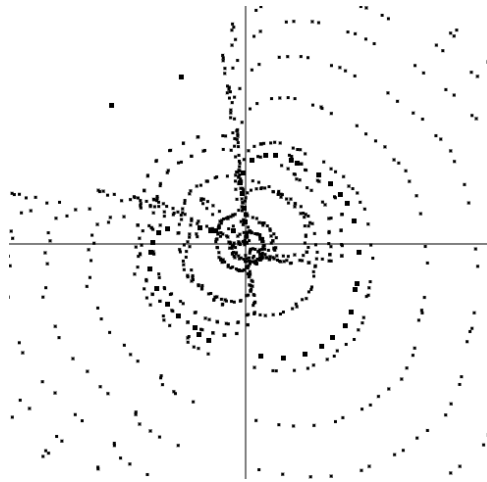
Program je napsán v javascriptu a má jednoduché ovládání – stačí klikáním určit pár bodů, poté zvolit kolik členů Fourierovy řady chcete vypočítat a stisknout tlačítka „vykreslit“ a „animovat“ (nutně v tomto pořadí). Tlačítko „vykreslit“ je doplněno vstupním políčkem, do kterého uživatel napíše, kolik členů řady chce vygenerovat.

Při klikání se v určené ploše objeví body, avšak ukládá se mnohem více bodů, které jsou lineárně doplněny mezi body zadanými uživatelem. Tyto body nejsou vykresleny, aby byla vidět přesnost aproximace.



Obrázek 2

Po zanesení bodů stiskneme tlačítko „vykreslit“. Po stisknutí tohoto tlačítka program vygeneruje zadaný počet členů (bez kterých animace nefunguje, proto je třeba stisknout tlačítka v daném pořadí) a vykreslí aproximaci pro zadaný počet členů, přičemž jsou generovány členy pro $n \in \{-z; -z + 1; \dots; z - 1; z\}$ kde z je zadané číslo. Koeficienty se počítají pomocí integrálu zmíněného v teoretické části. Integrál je počítán Reimannovou metodou. V první verzi program počítal integrály pouze ze zadaných bodů (bez doplňování). Nedostatek bodů způsoboval velice nepřesnou hodnotu členů, což se promítlo i ve výsledné aproximaci (viz obrázek 3).

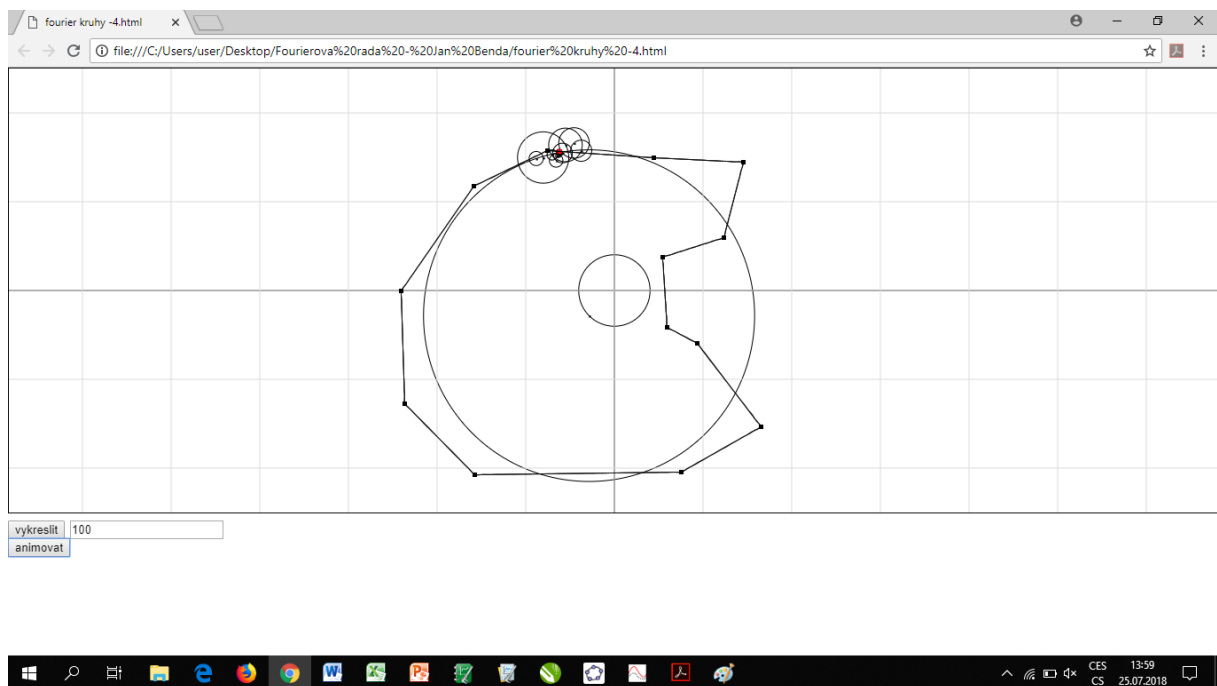


Obrázek 3

Problém vyřešila implementace zmíněného doplňování bodů ve druhé verzi programu. Body jsou doplňovány tak, aby ležely na přímce mezi zadanými body, a jejich počet se odvíjí od vzdálenosti posledních dvou zadaných bodů.

V třetí verzi byla přidána možnost spustit animaci aproximace, kdy kružnice obtahují zadanou křivku.

Ve čtvrté a finální verzi byl upraven pouze design.



Obrázek 4

Závěr

Podařilo se mi napsat program, který aproximuje uzavřenou křivku pomocí kružnic. Na tomto programu lze demonstrovat funkci a možnosti Fourierovy řady (např. schopnost aproximovat jakoukoliv spojitou křivku). Nedostatkem tohoto programu je aproximace konstantní funkce, která odpovídá zadání jediného bodu (funkční hodnota se s argumentem nemění, tudíž netvoří křivky). Příčinu se mi nepodařilo zjistit, ale domnívám se, že je to způsobeno, právě tím, že program dokáže aproximovat pouze křivky.

Zdroje

- Fourierova řada. *Wikipedia* [online], [cit. 2018-07-23]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Fourierova_řada