Náhodná procházka *)

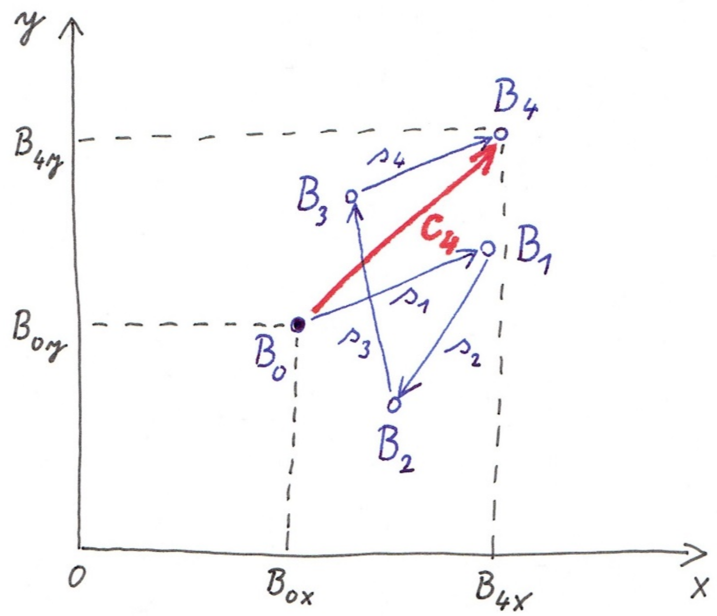
Dalším problémem, který nás bude zajímat, jsou zákonitosti pohybu v systémech tvořených velmi velkým množstvím chaoticky se pohybujících objektů. Tyto objekty se pohybují malými kroky, které jsou zcela náhodné. To znamená, že krok, který objekt právě dělá, není nijak ovlivněn kroky předcházejícími. Vše je zcela náhodné a chaotické, neexistuje žádná příčinná následnost kroků.

Náhodná procházka bývá často vysvětlována na pohybu opilého námořníka. Ten se vypotácí z hospody, a je rád, že udělá krok (není ale schopen ovládnout to, kterým směrem). Udělá tedy krok ven z hospody, zapotácí se a udělá další krok náhodným směrem, potom další krok... Zajímavé je, kam se dostane, když tímto způsobem (náhodnou procházkou) kráčí určitou dobu. Kam se dostane po *N* krocích a jak se to bude lišit od „cílené procházky“, kterou by směřoval do přístavu ke své lodi? Tento příklad ale není případem náhodné procházky se vším všudy. Spousty opilých námořníků vychází každý večer z hospod a do přístavu nakonec nějak dojdou, a dokonce i svou loď najdou (tedy... asi ne v období koronavirové pandemie, to jsou hospody zavřené...).

Hezký model náhodné procházky uvádí v článku [1] J. Mlynář. Článek máte k dispozici v materiálech k této přednášce. Inspirujme se tedy nápady z tohoto článku.

Představte si, že máte pytel plný blech, položíte ho na zem a uděláte do něj malou dírku. Touto dírkou vyskakují blechy, jedna za druhou. Blechy neúnavně skáčou, ale jejich skoky mají zcela náhodné směry. Každá blecha vykonává náhodnou procházku. Mohli bychom si položit otázku, kam doskáče náhodně vybraná blecha za určitou dobu (po vykonání *N* skoků). Odpověď by ale nebyla příliš užitečná. Zajímavější otázkou je kam v průměru doskáče blecha po *N* skocích (blech je velké množství – byl jich přece plný pytel).

Načrtněme si pohyb jedné blechy (např. čtyři její skoky):



B_0 označuje polohu díry, kterou blechy vyskakují z pytle, B_1 až B_4 polohy blechy po prvním až čtvrtém skoku. Samotné skoky jsou znázorněny šipkami s_1 až s_4. Po čtyřech skocích se blecha dostane do vzdálenosti c_4 od počáteční polohy. Na šipku c_4, kterou označujeme výsledek čtyř skoků se můžeme dívat jako na polohový vektor blechy vztažený k díře v pytli B_0.

Průmět „cesty“ c_4 do os x, y je následující:

$c_{4x} = B_{4x} - B_{0x}$,

$c_{4y} = B_{4y} - B_{0y}$.

V případě, že by blecha vykonala N skoků, bylo by to takto:

$c_{Nx} = B_{Nx} - B_{0x}$,

$c_{Ny} = B_{Ny} - B_{0y}$.

Blech, které vyskákaly z pytle, je velmi mnoho. Každá z nich doskákala po N skocích do jiné vzdálenosti c_N. Souřadnice koncového bodu cesty B_N jsou:

$B_{Nx} = c_{Nx} + B_{0x}$,

$B_{Ny} = c_{Ny} + B_{0y}$.

Nyní nás bude zajímat, jaká je střední hodnoty těchto souřadnic za předpokladu velmi velkého počtu blech, které skáčou zcela náhodně. Pro tyto střední hodnoty platí:

$\langle B_{Nx} \rangle = \langle c_{nx} \rangle + B_{0x}$,

$\langle B_{Ny} \rangle = \langle c_{ny} \rangle + B_{0y}$.

(Předpokládáme, že poloha díry v pytli se v našem souřadným systému nemění, a proto v uvedených vztazích není $\langle B_{0x} \rangle$, $\langle B_{0y} \rangle$, ale jsou zde rovnou příslušné střední hodnoty souřadnic díry B_{0x} a B_{0y}.

Zamysleme se nad středními hodnotami $\langle c_{Nx} \rangle$ a $\langle c_{Ny} \rangle$. Blech je velmi velký počet a skáčou vždy zcela náhodným směrem. (Můžeme navíc předpokládat, že „jedna blecha je jako druhá“ a skoky jsou téměř stejně dlouhé.) Pokud je směr skoku c_N určen úhlem α, který tento směr svírá s osou x, platí $c_{Nx} = c_N \cdot \cos\alpha$ a $c_{Ny} = c_N \cdot \sin\alpha$. Střední hodnoty $\langle c_{Nx} \rangle$ a $\langle c_{Ny} \rangle$ jsou potom dány výrazy $\langle c_{Nx} \rangle = \langle c_N \rangle \langle \cos\alpha \rangle$, $\langle c_{Ny} \rangle = \langle c_N \rangle \langle \sin\alpha \rangle$. Střední hodnoty $\cos\alpha$ a $\sin\alpha$ jsou rovny nule (α může nabývat všech možných hodnot mezi 0 a 360°).

Pokud jsou tedy střední hodnoty $\langle c_{Nx} \rangle$ a $\langle c_{Ny} \rangle$ rovny nule a platí:

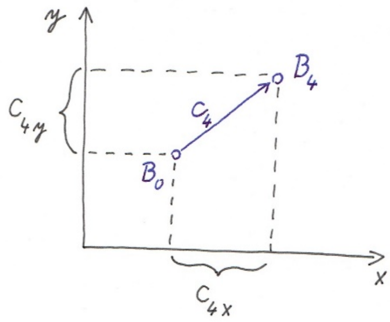
$\langle B_{Nx} \rangle = B_{0x}$,

$\langle B_{Ny} \rangle = B_{0y}$.

To se samozřejmě dalo rovnou uhádnout. Blechy se rozeskákaly rovnoměrně do všech stran a „těžiště“ hejna blech je v místě B_0, odkud blechy vyskákaly z pytle.

Když jsme si udělali představu o tom, jak se blechy rozeskáčou kolem pytle, pojďme se ještě podívat na to, jak daleko od pytle se blechy rozeskáčou.

Opět si načrtneme výsledek skákání jedné z blech po čtyřech skocích. (Jednotlivé skoky teď nejsou zakresleny, v náčrtu je pouze začátek a konec cesty.)



Platí zřejmě:

$$c_4^2 = c_{4x}^2 + c_{4y}^2\ . \qquad (1)$$

Víme, že poloha blechy B_4je výsledkem (náhodně orientovaných, zhruba stejně dlouhých) skoků s_1, s_2, s_3, s_4. Průměty délek těchto skoků do os *x*, *y* jsou $s_{1x}, s_{2x}, s_{3x}, s_{4x}$ a $s_{1y}, s_{2y}, s_{3y}, s_{4y}$. Orientace těchto průmětů může být jak ve směru osy, tak proti němu. Po dosazení do (1) dostaneme:

$$c_4^2 = (s_{1x} + s_{2x} + s_{3x} + s_{4x})^2 + \left(s_{1y} + s_{2y} + s_{3y} + s_{4y}\right)^2$$

(hodnoty s_{ix} mohou být jak kladné, tak záporné v závislosti na orientaci příslušného skoku).

Vztah můžeme rozepsat („roznásobit" závorky):

$$c_4^2 = s_{1x}^2 + s_{2x}^2 + s_{3x}^2 + s_{4x}^2 + 2s_{1x}s_{2x} + \cdots + s_{1y}^2 + s_{2y}^2 + s_{3y}^2 + s_{4y}^2 + 2s_{1y}s_{2y} + \cdots$$

(členy, které mají být napsány místo ⋯ jistě dokážete sami doplnit).

Podobný vztah můžeme napsat pro každou blechu, a nakonec určit střední hodnotu $\langle c_4^2 \rangle$:

$$\langle c_4^2 \rangle = \langle s_{1x}^2 \rangle + \langle s_{2x}^2 \rangle + \langle s_{3x}^2 \rangle + \langle s_{4x}^2 \rangle + 2\langle s_{1x} \rangle \langle s_{2x} \rangle + \cdots + \langle s_{1y}^2 \rangle + \langle s_{2y}^2 \rangle + \langle s_{3y}^2 \rangle + \langle s_{4y}^2 \rangle + 2\langle s_{1y} \rangle \langle s_{2y} \rangle + \cdots$$

Zamysleme se nad „smíšenými" členy v předchozí rovnici ($2\langle s_{1x} \rangle \langle s_{2x} \rangle$ apod.). Průmět skoku s_i do osy *x* lze napsat jako $s_{ix} = s_i \cdot \cos\alpha$, kde α je úhel, který svírá směr skoku s_i s osou *x*. Průmět tohoto skoku do osy *y* je potom $s_{iy} = s_i \cdot \sin\alpha$.
Lze tedy napsat např. $2\langle s_{1x} \rangle \langle s_{2x} \rangle = 2\langle s_1 \cdot \cos\alpha \rangle \langle s_2 \cdot \cos\alpha \rangle = 2\langle s_1 \rangle \langle \cos\alpha \rangle \langle s_2 \rangle \langle \cos\alpha \rangle$. Střední hodnota $\cos\alpha$ je ale rovna nule, a proto je celý výraz nulový. Totéž platí pro smíšené členy, v nichž vystupuje střední hodnota $\sin\alpha$. I tato střední hodnota je nulová. Všechny smíšené členy tedy vypadnou (jsou rovny nule) a zbydou pouze kvadratické členy:

$$\langle c_4^2 \rangle = \langle s_{1x}^2 \rangle + \langle s_{2x}^2 \rangle + \langle s_{3x}^2 \rangle + \langle s_{4x}^2 \rangle + \langle s_{1y}^2 \rangle + \langle s_{2y}^2 \rangle + \langle s_{3y}^2 \rangle + \langle s_{4y}^2 \rangle,$$

což lze napsat i takto:

$$\langle c_4^2 \rangle = \langle s_{1x}^2 \rangle + \langle s_{1y}^2 \rangle + \langle s_{2x}^2 \rangle + \langle s_{2y}^2 \rangle + \langle s_{3x}^2 \rangle + \langle s_{3y}^2 \rangle + \langle s_{4x}^2 \rangle + \langle s_{4y}^2 \rangle,$$

nebo také:

$$\langle c_4^2 \rangle = \langle s_1^2 \rangle + \langle s_2^2 \rangle + \langle s_3^2 \rangle + \langle s_4^2 \rangle. \qquad (2)$$

Budeme předpokládat, že střední délka jednotlivých skoků blech je stejná (jsou to neúnavné unifikované blechy...). U blech o tom sice můžete pochybovat, my jsme si je ale zvolili jenom pro zvýšení atraktivity problematiky náhodné procházky. Výsledky budeme později aplikovat na neživé objekty (částice vykonávající Brownův pohyb, molekuly...) a u těch bude tento předpoklad oprávněný.

Platí tedy:

$$\langle s_1^2 \rangle = \langle s_2^2 \rangle = \langle s_3^2 \rangle = \langle s_4^2 \rangle = \langle s^2 \rangle$$

a rovnici (2) můžeme napsat ve tvaru:

$$\langle c_4^2 \rangle = 4 \cdot \langle s^2 \rangle. \tag{3}$$

Zobecníme-li tento výsledek na *N* skoků blech (*N* kroků náhodné procházky) dostaneme

$$\langle c_N^2 \rangle = N \cdot \langle s^2 \rangle. \tag{4}$$

Pro počet kroků náhodné procházky (počet skoků zprůměrované blechy) odtud platí:

$$N = \frac{\langle c_N^2 \rangle}{\langle s^2 \rangle}.$$

Počet skoků průměrné blechy můžeme vyjádři také z doby, kterou blechy skáčou a ze střední délky jednoho skoku:

$$N = \frac{t_N}{\tau},$$

kde t_N je doba, kterou trvá *N* skoků a τ je střední délka skoku.

Porovnáním předchozích dvou vztahů dostaneme:

$$\frac{\langle c_N^2 \rangle}{\langle s^2 \rangle} = \frac{t_N}{\tau},$$

což lze přepsat na tvar:

$$\frac{\langle c_N^2 \rangle}{t_N} = \frac{\langle s^2 \rangle}{\tau}.$$

V tomto vztahu vystupují na levé straně makroskopicky měřitelné veličiny (střední kvadratická vzdálenost blechy od díry v pytli $\langle c_N^2 \rangle$ a doba, po kterou blechy skákaly t_N) a na pravé straně jsou mikroskopické veličiny charakterizující „systém blech“ (střední kvadratická délka skoku $\langle s^2 \rangle$ a střední doba trvání jednoho skoku τ). Takovýto vztah je velmi důležitý a je to typický výsledek kinetické teorie – říká nám, jak souvisí makroskopicky měřitelné veličiny v nějakém systému s mikroskopickými parametry tohoto systému.

Z principu věci vyplývá, že poměr $\langle s^2 \rangle / \tau$ je konstantní. To znamená, že také

$$\frac{\langle c_N^2 \rangle}{t_N} = konst.$$

Tím je vyjádřena základní vlastnost náhodné procházky:

$$\langle c_N^2 \rangle \sim t_N \,,$$

nebo-li:

$$\sqrt{\langle c_N^2 \rangle} \sim \sqrt{t_N} \,.$$

Výraz na levé straně nazveme střední kvadratickou vzdáleností (od počátku pohybu – označíme ji např. c_k), vpravo je odmocnina z doby trvání pohybu. Předchozí výsledek tedy zapíšeme jako:

$$c_k \sim \sqrt{t} \,. \tag{5}$$

Při náhodné procházce je tedy střední kvadratická vzdálenost, do které se objekt dostane, úměrná odmocnině z času, po který pohyb trvá. Tím se náhodná procházka výrazně liší od „cílevědomého pohybu“, kdy se těleso pohybuje např. rovnoměrným přímočarým pohybem. V tom případě platí, že vzdálenost, do které se dostane je úměrná času $(s = v \cdot t)$.

Vztah (5) využijeme při rozboru Brownova pohybu.

Literatura:

[1] Mlynář, J.: *Termojaderná fúze a difúze (o náhodné procházce).* Rozhledy matematicko-fyzikální 89 (2014) 1.

---

*) *Tvorba materiálu byla podpořena z Fondu vzdělávací politiky MŠMT na rok 2020, projekt Podpora zkvalitnění přípravy učitelů matematiky, fyziky a informatiky na MFF UK.*