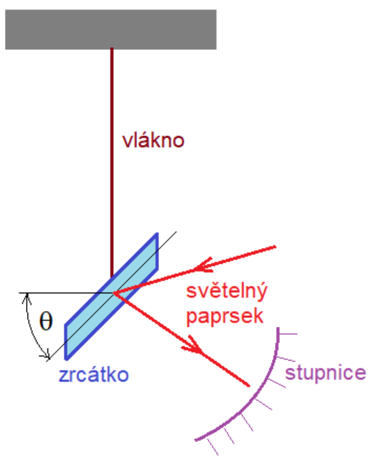
Projevy Brownova pohybu *)

S Brownovým pohybem se lze setkat v různých (možná trochu nečekaných) situacích. Ukážeme si dvě z nich.

1. Zrcátko na niti

V dřívějších dobách se pro měření malých proudů (velikosti např. nanoampérů) používaly tzv. balistické galvanometry. Princip jejich činnosti spočíval v tom, že měřený proud procházel cívečkou spojenou s lehounkým zrcátkem. Vše viselo na tenkém křemenném vlákně. Cívka přitom byla umístěna v magnetickém poli permanentního magnetu. Když cívkou procházel malý měřený proud, pootočila se. Pootočení bylo ale velmi malé, v podstatě nepostřehnutelné. Na zrcátko se proto svítilo světelným paprskem, který se odrážel na vzdálenou stupnici. Ta bývala umístěna třeba i několik metrů daleko. Prasátko na stupnici se viditelně pohnulo i při nepatrném pootočení zrcátka spojeného s cívečkou. Přístroj byl umístěn tak, aby se na něj nepřenášelo chvění budovy, závěsu apod. Přesto se ale prasátko na stupnici neustále chvělo (aniž by cívkou procházel proud).
Čím je toto chvění způsobeno? U brownovské částice ve vodě je její chaotický pohyb důsledkem fluktuací tlaku v okolní kapalině. Jde o malé objemy kapaliny, proto se fluktuace pozorovatelně projevují. Křemenné vlákno je tvořeno atomy, které jsou uspořádány v krystalové mřížce a kmitají kolem svých rovnovážných poloh. Těmto kmitům přísluší určitá energie. Kdybychom spočítali střední hodnotu této energie a měřili její okamžité hodnoty, objevili bychom fluktuace celkové energie kmitů. V subtilním křemenném vlákně je sice z našeho hlediska ohromný počet částic, není ale tak velký, aby se nepatrně neprojevovaly zmíněné fluktuace. Zrcátko tedy vykonává kmitavý pohyb způsobený těmito fluktuacemi, a to lze považovat za formu Brownova pohybu.
Brownovské kmity zrcátka limitují přesnost galvanoměru. Pokusíme se odhadnout, jaká je hranice přesnosti zařízení.



Obr. 1. Zrcátko na křemenném vlákně.

Zrcátko na vlákně je torzním kyvadlem. Jeho kinetická energie je dána vztahem:

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2,$$

kde J je moment setrvačnosti zrcátka a ω úhlová frekvence jeho torzních kmitů.

Potenciální energii torzního kyvadla lze vyjádřit jako:

$$E_p = \frac{1}{2} D\theta^2,$$

kde D je direkční moment vlákna (je to moment sil, který vzniká díky zkroucení vlákna a snaží se ho vrátit do původní polohy), θ je úhel torzní výchylky z rovnovážné polohy (viz obr. 1).
Kdybychom stáčeli zrcátko momentem síly M, bránilo by se vlákno direkčním momentem D. Pokud se přitom jedná o elastickou torzní deformaci vlákna, je mezi M a D jednoduchá souvislost:

$$M = -D\theta.$$

(Je to analogické, jako když natahujeme pružinu silou F. Platí $F = -kx$. Tuhost pružiny je zde analogií direkčního momentu, výchylka x je analogická ke stočení θ a síla F je analogií k momentu M.)

Napíšeme pohybovou rovnici pro torzní kyvadlo:

$$M = J\varepsilon$$

$$M = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Za M dosadíme $-D\theta$ a dostaneme:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{D}{J}\theta.$$

Tuto rovnici snadno vyřešíme. Řešením může být např. funkce

$$\theta = \cos\omega t.$$

Snadno zjistíme, že $\omega^2 = \frac{D}{J}$. Z mechaniky nejspíš víte, že omega v tomto vztahu značí v případě volných kmitů torzního kyvadla vlastní frekvenci jeho kmitavého torzního pohybu. Označíme ji, podle zvyklosti, ω_0. Můžeme tedy napsat:

$$D = J\omega_0^2.$$

Vzpomeneme si na ekvipartiční princip a budeme ho aplikovat na torzní kmity zrcátka. Na každý kvadratický člen, který skládá energii zrcátka, by měla v průměru připadnout energie $\frac{1}{2}k_BT$. To tedy znamená, že např. střední hodnota potenciální energie kmitajícího zrcátka je $\frac{1}{2}k_BT$.

Pro potenciální energii zrcátka platí s uvážením výše uvedených vztahů:

$$E_p = \frac{1}{2}J\omega_0^2\theta^2.$$

Porovnáme-li tuto energii se střední hodnotou danou ekvipartičním teorémem:

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

dostaneme vztah, který udává dolní hranici přesnosti balistického galvanoměru:

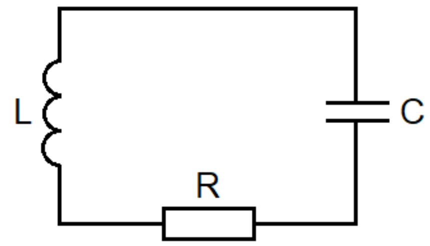
$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{k_B T}{J \omega_0^2}.$$

Je to střední hodnota kvadrátu úhlové výchylky zrcátka z rovnovážné polohy, ke které bude docházet, i když cívečkou neprochází proud.

Je tedy vidět, že pokud chceme zvýšit přesnost měření, musíme vlákno chladit.

2. *Johnsonův šum*

Balistický galvanoměr, o kterém byla řeč v předchozím textu, patřil ke špičkovým měřicím přístrojům první poloviny 20. století (i když i v období po 2. světové válce byste ho našli v každé dobře vybavené laboratoři). Po vynálezu tranzistoru a následujícím prudkém rozmachu polovodičové elektroniky byly staré měřicí přístroje nahrazeny citlivými elektronickými aparaturami. Dnes si kvalitní univerzální měřicí přístroj (multimetr) můžete pořídit za pár stokorun. Špičkové přístroje pro měření elektrického proudu (a jiných elektrických veličin) mají na vstupu velmi citlivý zesilovač. Nejcitlivější přístroje bývají konstruovány pro určitou frekvenci, a aby byl zesilovač citlivý právě na tuto frekvenci, má na vstupu kvalitní rezonanční obvod.



Obr. 2. Rezonanční obvod.

Hlavními prvky rezonančního obvodu jsou cívka L a kondenzátor C. Obvod má vždy určitý malý odpor, který je ve schématu zastoupen rezistorem R. V obvodu snímáme napětí na cívce s indukčností L a toto napětí je dále zpracováváno v zesilovači (ten ve schématu není). Předpokládáme, že zařízení pracuje na hranici své citlivosti. Zajímá nás, jaké jsou fluktuace napětí na cívce L.

Energii, kterou má cívka v rezonančním obvodu můžeme vyjádřit jako

$$E = \frac{1}{2} L I^2.$$

Jak vidíte, máme zde „kvadratický člen“ a tomu podle ekvipartičního principu přiřadíme střední energii $\langle E \rangle = \frac{1}{2} k_B T$. Porovnáním získáme vztah

$$k_B T = L I^2. \tag{1}$$

Vzpomeneme si, že pro induktanci X_L („odpor cívky“ ve střídavém obvodu) platí

$$X_L = \omega_0 L,$$

kde ω_0 je úhlová frekvence vlastních kmitů rezonančního odvodu.

Ze vztahu $I = \frac{U_L}{X_L}$ (plyne z Ohmova zákona) a s uvážením předchozí rovnice dostaneme

$$I^2 = \frac{U_L^2}{\omega_0^2 L^2}. \tag{2}$$

Ze vztahu (1) lze vyjádřit I^2. Vzhledem k tomu, že jsme energii cívky porovnali se střední hodnotou energie danou ekvipartičním principem, jde vlastně o střední kvadratickou hodnotu proudu:

$$\langle I^2 \rangle = \frac{k_B T}{L}.$$

Za pomoci vztahu (2) určíme střední kvadratickou hodnotu napětí na cívce:

$$\langle U_L^2 \rangle = L \omega_0^2 k_B T. \tag{3}$$

Vztah (3) udává střední hodnotu kvadrátu napětí, kterou můžeme na cívce očekávat vlivem fluktuací. Při konstrukci zesilovače tedy můžeme odhadnout, jaký bude šum (tzv. Johnsonův šum), kterého se nezbavíme a který tedy bude určovat dolní práh citlivosti našeho zařízení.

Odkud se tyto fluktuace berou? Může za ně rezistor R, který je zakreslen ve schématu na obr. 2. V jeho odporu je zahrnut odpor spojovacích vodičů a také vodiče, ze kterého je vyrobena cívka L. V kovech jsou tzv. vodivostní elektrony. Ty se ve vodiči chaoticky pohybují. Kdybychom zjistili, kolik je vodivostních elektronů v jednotkovém objemu vodiče, získali bychom tzv. elektronovou hustotu. Elektronová hustota fluktuuje a fluktuace se pozorovatelně projevují za předpokladu, že vodivostních elektronů není příliš mnoho. Jak víte z 8. přednášky, relativní fluktuace je nepřímo úměrná odmocnině z počtu částic. V malých objemech vodičů lze tedy citlivými měřeními fluktuace elektronové hustoty zaznamenat. Díky nim vznikají nepatrná elektrická pole, která působí na rezonanční obvod. Fluktuace elektronové hustoty samozřejmě generují šum všech možných frekvencí, rezonanční obvod si ale zesílí tu frekvenci, která je blízká jeho rezonanční frekvenci. Johnsonův šum se dá snížit snižováním teploty obvodu, Proto jsou nejcitlivější měřicí aparatury často chlazené.

---

*) *Tvorba materiálu byla podpořena z Fondu vzdělávací politiky MŠMT na rok 2020, projekt Podpora zkvalitnění přípravy učitelů matematiky, fyziky a informatiky na MFF UK.*