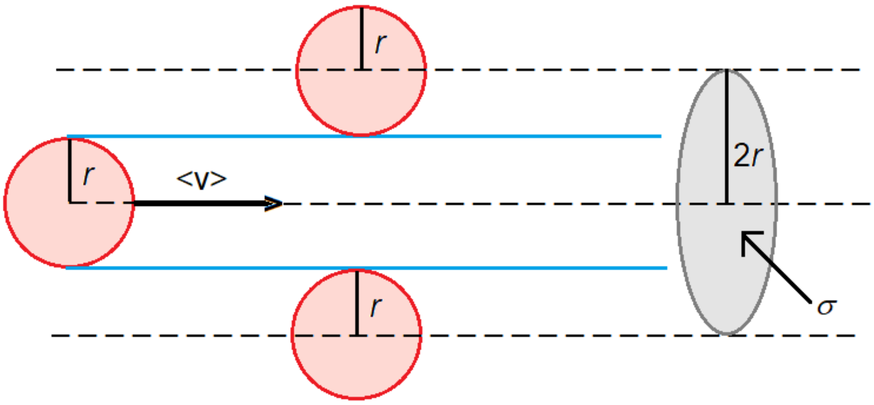
Vzájemné srážky molekul v plynu *)

a) Srážková frekvence (střední počet srážek za jednotku času)

Začneme velmi zjednodušeným modelem pohybu molekul. Představíme si, že všechny molekuly jsou v klidu a pouze jedna se pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí $\langle v \rangle$. (Tedy rychlostí, jejíž velikost je rovna střední hodnotě rychlosti molekul v plynu.)



Obr. 1. Jednoduchý model srážek molekul v plynu.

Při svém pohybu tato molekula naráží do jiných molekul (předpokládáme, že plyn je tvořen pouze jedním druhem molekul). Za srážku považujeme i tečný kontakt s jinou molekulou. Pohybující se molekula přitom nemění směr. Je to myšleno spíše tak, že molekula při svém pohybu prochází místy, kde by se mohly nacházet jiné molekuly. Sráží se s pouhými „stíny molekul" a nemá tedy důvod měnit svůj pohyb. Můžeme si představit jakýsi válcový prostor o poloměru $2r$, kterým molekula prochází. Jakákoli jiná molekula, která se libovolnou svou částí octne v tomto válcovém prostoru, se s pohybující se molekulou srazí (obr. 1).

Kolik srážek s ostatními molekulami naše referenční molekula absolvuje v průměru za 1 sekundu? Označme tento počet $\langle \tilde{z} \rangle$

$$\langle \tilde{z} \rangle = \pi (2r)^2 \langle v \rangle \cdot 1\mathrm{s} \cdot N_V, \tag{1}$$

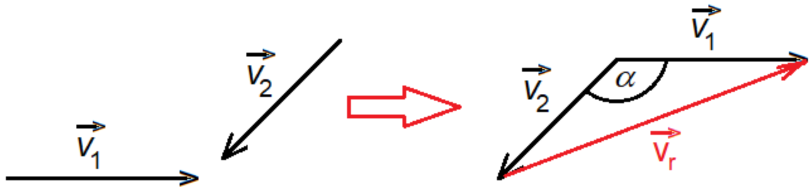
kde N_V je hustota molekul (počet molekul v jednotkovém objemu), $\langle v \rangle$ střední rychlost molekul, 1s označuje čas 1 sekundy. Určili jsme tedy, jaký je objem „srážkového prostoru", který referenční molekula projde za 1 sekundu, vynásobili ho hustotou molekul a tím jsme určili počet srážek za 1 s.

Po mírné úpravě (a s vynecháním údaje 1s) dostaneme:

$$\langle \tilde{z} \rangle = 4\pi r^2 \langle v \rangle N_V. \tag{2}$$

Představa, že jedna molekula se pohybuje střední rychlostí a všechny ostatní jsou v klidu je přílišným zjednodušením situace. Ve skutečnosti se pohybují všechny molekuly. Rychlost molekuly, jejíž srážky s ostatními počítáme (prve nezvaná referenční molekulou) označíme $\overrightarrow{v_1}$, rychlost molekuly, s níž se má za okamžik tato molekula srazit je $\overrightarrow{v_2}$. tyto dvě molekuly se vůči sobě pohybují relativní rychlostí $\overrightarrow{v_r}$. Pro relativní rychlost platí:

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}.$$



Obr. 2. Relativní rychlost srážejících se molekul.

Velikost relativní rychlosti určíme pomocí kosinové věty:

$$v_r^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha.$$

To je ale vzájemná relativní rychlost dvou konkrétních molekul. V plynu je molekul obrovský počet a pro naše úvahy je důležité určit střední hodnotu relativní rychlosti:

$$\langle v_r^2\rangle = \langle v_1^2\rangle + \langle v_2^2\rangle - \langle 2v_1v_2\cos\alpha\rangle.$$

Střední hodnota $\cos\alpha$ je nula a střední hodnota kvadrátu rychlosti molekul plynu má právě jednu hodnotu, není třeba používat indexy u prvních dvou členů na pravé straně. Vztah pro střední hodnotu relativní rychlosti se zjednoduší:

$$\langle v_r^2\rangle = \langle v_1^2\rangle + \langle v_2^2\rangle = 2\langle v^2\rangle$$

Do vzorce pro počet srážek použijeme odmocninu ze střední hodnoty kvadrátu relativní rychlosti:

$$\sqrt{\langle v_r^2\rangle} = \sqrt{2}\langle v\rangle.$$

Do vztahu (2) dosadíme místo střední hodnoty rychlosti hodnotu $\sqrt{2}\langle v\rangle$ (molekuly se vůči sobě pohybují rychlostí rovnou střední hodnotě relativní rychlosti). Dostáváme zpřesněný vztah pro průměrný počet srážek molekuly za 1 sekundu. Tomuto počtu se říká ***srážková frekvence***:

$$\langle z\rangle = 4\pi\sqrt{2}r^2\langle v\rangle N_V. \tag{3}$$

Při výpočtu srážkové frekvence bychom také mohli počítat s plochou označenou v obr. 1 písmenem σ. Této ploše se říká účinný průřez. pro účinný průřez platí:

$$\sigma = \pi(2r)^2 = 4\pi r^2.$$

Pro srážkovou frekvenci potom platí:

$$\langle z\rangle = \sqrt{2}\sigma\langle v\rangle N_V. \tag{3a}$$

Příklad:

Vypočítejme srážkovou frekvenci pro dusík za normálních podmínek.

Hustota molekul N_2 za normálních podmínek je přibližně $3\cdot10^{25}$ m^{-3}, poloměr molekuly $r \doteq 1{,}5\cdot10^{-10}$ m a střední rychlost molekul N_2 $\langle v\rangle \doteq 450$ m/s.
Po dosazení do (3) dostaneme srážkovou frekvenci $\langle z\rangle \doteq 5{,}4\cdot10^{9}$ s^{-1}. Molekula dusíku tedy za

normálních podmínek (t = 0 °C, p = 101,325 kPa) absolvuje každou sekundu přibližně 5,5 miliard srážek s jinými molekulami.

b) Střední volná dráha

Střední volnou dráhou $\langle l \rangle$ máme na mysli vzdálenost, kterou molekula v průměru proletí mezi dvěma srážkami s jinou molekulou. Určíme ji snadno ze známých vztahů pro střední rychlost molekuly $\langle v \rangle$ a srážkovou frekvenci $\langle z \rangle$:

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle}.$$

Po dosazení za srážkovou frekvenci dostaneme vztah:

$$\langle l \rangle = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}r^2 N_V}, \tag{4}$$

nebo s využitím účinného průřezu:

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma N_V}. \tag{4a}$$

Ze vztahu (4a) je vidět, že střední volná dráha je nepřímo úměrná hustotě molekul:

$$\langle l \rangle \sim \frac{1}{N_V},$$

a protože, jak už z dřívějška víme, hustota molekul je úměrná tlaku plynu p, plyne odsud, že střední volná dráha je nepřímo úměrná tlaku plynu:

$$\langle l \rangle \sim \frac{1}{p}.$$

Příklad:
Vypočteme střední volnou dráhu molekuly dusíku při normálních podmínkách.
Hustota molekul dusíku za normálních podmínek je přibližně $3 \cdot 10^{25}$ m^{-3}, poloměr molekuly dusíku je zhruba $1{,}5 \cdot 10^{-10}$ m. Pro střední volnou dráhu potom vyjde $\langle l \rangle \doteq 8{,}3 \cdot 10^{-8}$ m.
Z normálních podmínek tedy molekula dusíku proletí mezi dvěma srážkami přibližně miliontinu centimetru.

Z nepřímé úměrnosti střední volné dráhy a tlaku můžeme vyvodit následující vztah pro výpočet střední volné dráhy:

$$\langle l \rangle = konstanta \cdot \frac{1}{p}, \langle l_n \rangle = konstanta \cdot \frac{1}{p_n} \Rightarrow \frac{\langle l_n \rangle}{\langle l \rangle} = \frac{p}{p_n},$$

kde $\langle l_n \rangle$ a p_n značí střední volnou dráhu a tlak za normálních podmínek (t =0 °C, p =101,325 kPa).

Pro střední volnou dráhu při tlaku p tedy platí:

$$\langle l \rangle = \frac{\langle l_n \rangle \cdot p_n}{p}.$$

Snadno se pamatuje, že při tlaku 1 Pa je střední volná dráha molekul ve vzduchu přibližně 1 cm.

c) střední doba mezi dvěma srážkami

Tento parametr popisující srážky molekul v plynu snadno určíme jako převrácenou hodnotu srážkové frekvence:

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}r^2\langle v \rangle N_V}\,.$$

Pokud bychom do vztahu pro $\langle \tau \rangle$ chtěli zavést účinný průřez, dostali bychom vztah:

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma\langle v \rangle N_V}\,.$$

Za normálních podmínek v dusíku je $\langle \tau \rangle \approx 10^{-10}$ s.

---

*) *Tvorba materiálu byla podpořena z Fondu vzdělávací politiky MŠMT na rok 2020, projekt Podpora zkvalitnění přípravy učitelů matematiky, fyziky a informatiky na MFF UK.*