

Transportní děje v plynech – úvodní komentář *)

Pod tímto názvem se skrývají děje, při kterých je plynem přenášena (transportována) určitá fyzikální veličina. (Vím, je to řečeno trochu šroubovitě...) Konkrétně se budeme zabývat

1. přenosem hmotnosti (difúzí),
2. přenosem hybnosti (tzv. viskózním tokem),
3. přenosem energie (tepelnou vodivostí).

Transportní děje lze samozřejmě studovat i v jiných látkách než v plynech. Tam je ale jejich popis mnohem složitější.

Při studiu transportních dějů budeme používat veličiny tok a hustota toku.

Tok veličiny

Tokem veličiny myslíme množství veličiny prošlé plochou o velikosti S za dobu Δt . Tok budeme značit písmenem N .

Hustota toku veličiny

Hustota toku veličiny i je definována jako množství veličiny prošlé jednotkovou plochou za jednotku času.

$$i = \frac{N}{S\Delta t}.$$

Tímto vztahem je definována velikost hustoty toku. Hustota toku je vektorovou veličinou a je spojena s gradientem přenášené veličiny. Tok probíhá vždy z místa s velkou koncentrací veličiny do míst s menší koncentrací, tedy proti gradientu transportované veličiny. Pokud přenášenou veličinu označíme např. ρ , platí pro hustotu toku \vec{i} :

$$\vec{i} = -\alpha \operatorname{grad}\rho, \quad (1)$$

α zde označuje součinitel příslušného transportního děje.

Často orientujeme osu x ve směru toku. Potom rovnici (1) můžeme zapsat jako:

$$i_x = -\alpha \frac{d\rho}{dx}.$$

Místo gradientu veličiny ρ bereme často gradient veličiny, která je veličině ρ úměrná.

Důležitou roli v transportních dějích hrají srážky molekul. Nejprve se tedy budeme věnovat srážkám molekul a poté jednotlivým výše uvedeným transportním dějům.

Transportní děje v plynech

V této kapitole se budeme věnovat třem transportním dějům v plynech. Budou to:

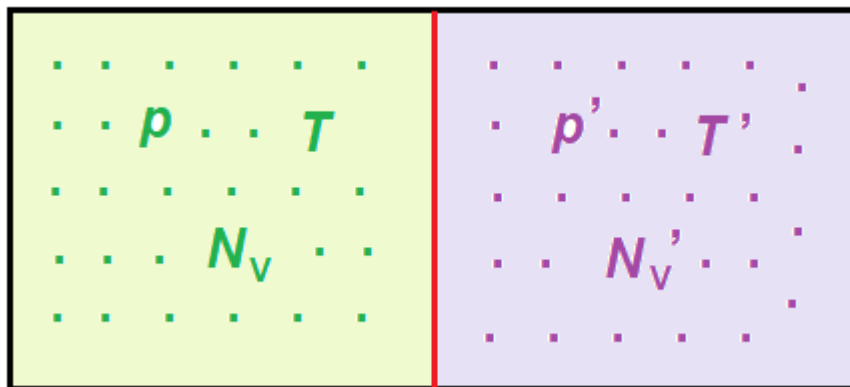
1. transport hmotnosti (difúze),
2. transport hybnosti (viskózní tok),
3. transport energie (tepelná vodivost).

DIFÚZE

Představme si nádobu s plynem, která je nějakou přepážkou rozdělena na dvě části. V každé části je jiný plyn. Situace je načrtnuta na obrázku 1. S jistou nadsázkou budeme plynům říkat zelený plyn (nečárkovaný – vlevo) a fialový plyn (čárkovaný – vpravo). Přepážka je znázorněna červenou čarou. Budeme předpokládat, že platí:

$$p = p'$$

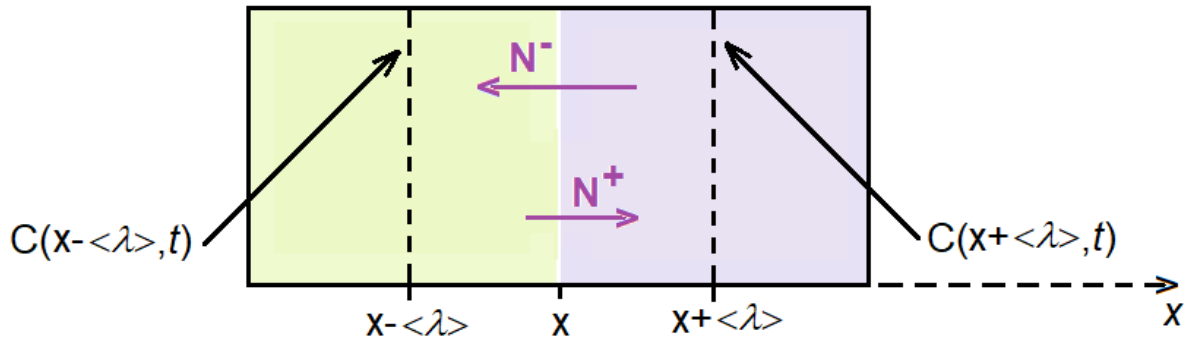
$$T = T'$$



Obr. 1. Situace před odstraněním přepážky. V každé části nádoby je jiný plyn.

V určitém okamžiku odstraníme přepážku. Plyny se začnou promíchávat – budou difundovat jeden do druhého. Bezprostředně po odstranění přepážky je vpravo pouze fialový a vlevo pouze zelený plyn. Molekuly vykonávají chaotický pohyb a díky němu začne fialový plyn pronikat doleva a zelený doprava. Budeme sledovat např. fialový plyn (u zeleného vše probíhá obdobně).

Molekuly se v místě, kde původně byla přepážka, pohybují na všechny strany. Poté, co molekula proletí volnou dráhu, srazí se s jinou molekulou a změní směr. Některé z fialových molekul (molekuly samozřejmě nelze obarvit...) se pohybují doleva mezi molekuly zeleného plynu. Postupně jich tam přibývá, dokud je ale vpravo větší koncentrace fialových molekul než vlevo, pohybuje se více fialových molekul doleva. Některé z nich se přesto pohybují doprava a vrací se do pravé části nádoby. Budeme si všimnout toků fialových molekul podél osy x (obr. 2). V určitém čase t , ve kterém ještě nedošlo k vyrovnání koncentrací molekul v nádobě, existuje tok N^- proti směru osy x a tok N^+ ve směru této osy. N^- je větší než N^+ . Situaci v čase t znázorňuje obrázek 2.



Obr. 2. Situace v čase t po odstranění přepážky.

Střední volná dráha je na obrázku 2 označena $\langle \lambda \rangle$. V místě označeném $x + \langle \lambda \rangle$ je koncentrace fialových molekul $C(x + \langle \lambda \rangle, t)$, v místě $x - \langle \lambda \rangle$ je koncentrace těchto molekul $C(x - \langle \lambda \rangle, t)$. Platí to právě v okamžiku t , koncentrace se totiž s časem mění. Místa, která jsou označena čárkovaně, jsou od polohy, kde byla přepážka, vzdálena o střední volnou dráhu. Tuto vzdálenost proletí molekuly bez srážek, na jejím konci ke srážkám dochází. Ke změnám v plynu dochází díky srážkám molekul.

Vyjádříme toky N^+ a N^- :

$$N^+(x, t) = C(x - \langle \lambda \rangle, t) \cdot S \cdot \tau \cdot \langle v_x \rangle$$

$$N^-(x, t) = C(x + \langle \lambda \rangle, t) \cdot S \cdot \tau \cdot \langle v_x \rangle$$

V obou vztazích je písmenem τ označena střední doba mezi srážkami, S je plocha, kterou molekuly prochází (velikost plochy řezu nádobou). Ve vztazích je řečeno, že za dobu τ projdou molekuly objem $S \cdot \tau \cdot \langle v_x \rangle$. Předpokládáme, že v tomto objemu je stejná koncentrace molekul jako v místě $x + \langle \lambda \rangle$ (resp. $x - \langle \lambda \rangle$), odkud molekuly „startují“. Pravé strany obou předchozích rovnic tedy udávají, kolik molekul projde za čas τ průřezem nádoby (kolmým k ploše obrázku) v místě, kde dříve byla přepážka. A to vše v čase t , který je uvnitř doby τ .

Výsledný tok částic (fialových molekul) plochou S v místě x a v čase t určíme jako rozdíl toků $N^- - N^+$. (Zajímá nás, kolik částic se ve výsledku přesune plochou v místě x a v čase t zleva doprava, proto toky odečítáme.)

Určíme tedy výsledný tok „fialových molekul“ místem x v čase t :

$$N(x, t) = N^-(x, t) - N^+(x, t)$$

$$N(x, t) = C(x + \langle \lambda \rangle, t) \cdot S \cdot \tau \cdot \langle v_x \rangle - C(x - \langle \lambda \rangle, t) \cdot S \cdot \tau \cdot \langle v_x \rangle$$

$$N(x, t) = S \cdot \tau \cdot \langle v_x \rangle \cdot \{C(x + \langle \lambda \rangle, t) - C(x - \langle \lambda \rangle, t)\} \quad (1)$$

Od rovnice pro tok molekul přejdeme ke vztahu po hustotu toku molekul:

$$i(x, t) = \frac{N(x, t)}{S \tau} = \langle v_x \rangle \cdot \{C(x + \langle \lambda \rangle, t) - C(x - \langle \lambda \rangle, t)\} \quad (2)$$

Vypočítáme střední hodnotu x -ové složky rychlosti:

$$\langle v_x \rangle = \int_0^{\infty} v_x \rho(v_x) dv_x.$$

Pro hustotu pravděpodobnosti v tomto případě (složka rychlosti) jsme již dříve našli vztah:

$$\rho(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \cdot e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}},$$

pro $\langle v_x \rangle$ tedy platí:

$$\langle v_x \rangle = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \cdot \int_0^{\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}} dv_x.$$

Poznáváte určitě, že se opět setkáváme s Poissonovým integrálem (I₁).

Řešení jistě zvládnete. Výsledkem bude:

$$\langle v_x \rangle = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2k_B T}{m} = \dots = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m}}.$$

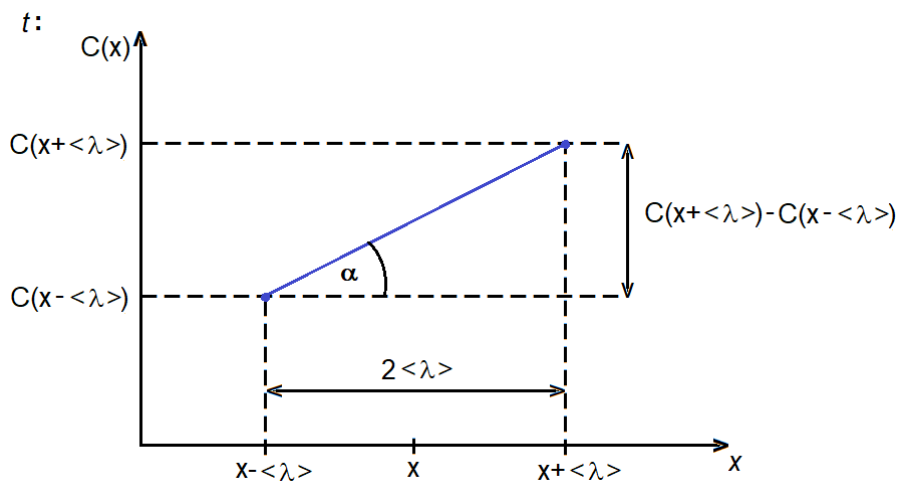
Když výsledek porovnáte s tím, co jsme už dříve zjistili pro střední rychlost $\langle v \rangle$, dostanete užitečný vztah:

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{4} \langle v \rangle.$$

Pro hustotu toku (jde o hustotu toku hmotnosti) potom můžeme napsat:

$$i(x, t) = \frac{1}{4} \langle v \rangle \cdot \{C(x + \langle \lambda \rangle, t) - C(x - \langle \lambda \rangle, t)\}.$$

V námi zvoleném čase t , kdy ještě nedošlo k vyrovnání koncentrací plynů v nádobě platí, že koncentrace „fialových molekul“ roste ve směru osy x . Na vzdálenosti dvou středních volných délek, můžeme bez problémů považovat nárůst koncentrace za lineární (obr. 3).



Obr. 3. Nárůst koncentrace „fialových molekul“ podél osy x .

Pomocí obrázku 3 snadno zjistíme, že:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dC(x, t)}{dx} = \frac{\{C(x + \langle \lambda \rangle, t) - C(x - \langle \lambda \rangle, t)\}}{2\langle \lambda \rangle},$$

kde $\frac{dC(x,t)}{dx}$ vyjadřuje nárůst (rychlost růstu) koncentrace fialových molekul v okolí „místa x “ v čase t .

Pro velikost hustoty toku $i(x, t)$ tedy můžeme napsat:

$$i(x, t) = \frac{1}{4} \langle v \rangle \cdot 2 \langle \lambda \rangle \frac{dC(x, t)}{dx}.$$

Tok „fialových molekul“ ale, jak víme, probíhá proti směru nárůstu koncentrace (proti gradientu koncentrace). Pro hustotu toku tedy napíšeme:

$$\vec{i}(x, t) = -\frac{1}{2} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \frac{dC(x, t)}{dx}. \quad (3)$$

Ve fenomenologické teorii difúze je formulován tzv. 1. Fickův zákon. Ten se často zapisuje ve tvaru:

$$\vec{i}(x, t) = -D \frac{dC(x, t)}{dx}, \quad (4)$$

popř.

$$\vec{i} = -D \text{grad} C,$$

kde C značí koncentraci a D je difúzní součinitel. My jsme na základě mikroskopických úvah získali vztah (3), který je 1. Fickovu zákonu (4) podezřele podobný. Z této podobnosti plyne mikroskopická interpretace difúzního součinitele D :

$$D = \frac{1}{2} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle.$$

(Mikroskopická interpretace je to proto, že difúzní součinitel máme vyjádřen pomocí „mikroskopických parametrů“ difundujícího plynu – střední rychlosti molekul a střední volné dráhy molekul plynu.)

Přesnější úvahy a výpočty vedoucí k mikroskopické interpretaci difúzního součinitele provedli v letech 1915-1917 Chapman a Enskog. Ve svých výpočtech uvažovali i silové působení mezi molekulami (které jsme my zanedbali). Navíc ve svém modelu difúze molekul plynu připouštěli pohyb molekul i v jiných směrech než v tom, který je dán směrem největšího růstu koncentrace. Gradient koncentrace podle Chapmana a Enskoga představuje pouze preferovaný směr pohybu molekul. Molekuly tedy nemusí ze vzdálenosti $\langle \lambda \rangle$ doletět až k místu průřezu S , kterým jsme tok molekul určovali. Tento přesnější model difúze dává pro difúzní součinitel hodnotu $D = 0,599 \langle v \rangle \langle \lambda \rangle$.

I zpřesněný Chapmanův-Enskogův model ale říká, že difúzní součinitel je dán výrazem $\langle v \rangle \langle \lambda \rangle$. Pouze konstanta před ním je jiná.

Pokud bychom chtěli náš výsledek ještě dále rozvádět, dosadili bychom za střední rychlost a střední volnou dráhu dříve odvozené výrazy a pro součinitel difúze bychom získali vztah:

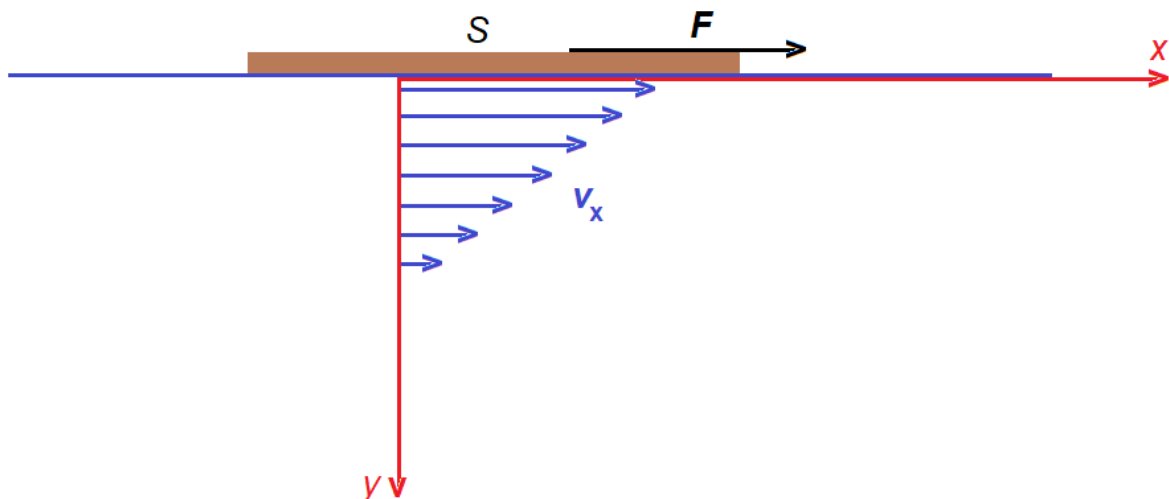
$$D = \frac{1}{4\pi^{3/2}} \frac{\sqrt{k_B T}}{r^2 N_V}.$$

Pokud nebereme v úvahu teplotní závislost průměru molekuly (což se v přesnějších modelech v úvahu bere), bude se podle předchozího vztahu difúzní součinitel zvětšovat úměrně odmocnině z teploty (při stálém objemu plynu). Protože tlak plynu je úměrný hustotě molekul, musí být při konstantní teplotě difúzní součinitel nepřímo úměrný tlaku. Při konstantním tlaku je koncentrace molekul nepřímo úměrná střední hodnotě kvadrátu

rychlosti. Jak ale víme z dřívějších, mezi teplotou a střední hodnotou kvadrátu rychlosti je přímá úměra. Všechny tyto úvahy nakonec vedou k závěru, že zahříváme-li plyn při konstantním tlaku, bude se difúzní součinitel zvyšovat úměrně $T^{3/2}$.

VISKÓZNÍ TOK PLYNU

Když se Isaac Newton na dva roky odstěhoval na venkov, aby se vyhnul morové epidemii (dobrovolně tedy absolvoval dvouletou karanténu), čile tam experimentoval a vymýšlel fyziku. Mimo jiné zkoumal to, jak teče voda. Vyrobil si dlouhé koryto se skleněnými okny na boku. Koryto naplnil vodou a do té nasypal plavuňový prášek (pyl plavuně). Plavuňový prášek se volně vznášel ve vodě a Newton mohl pohledem přes skleněná okénka zkoumat, jak proudí voda, když na její hladinu položil prkno a toto prkno tahal po hladině ve směru koryta. Všiml si, že voda těsně pod prknem, má stejnou rychlost jako prkno, směrem do hloubky ale rychlost proudění klesala. V určité hloubce voda přestala proudit. Když nebyla hloubka vody v korytu moc velká bylo to tak, že voda u dna se nepohybovala, pod prknem měla rychlost stejnou jako prkno a mezi prknem a dnem rychlost lineárně klesala. Vypadalo to, jako by se voda lepila k prknu i ke dnu. Newton usoudil, že mezi jednotlivými proudícími vrstvami vody musí existovat nějaká síla, kterou na sebe vrstvy působí. Vrstvy se mohou vzájemně rozhýbat, ale také brzdit. Jako by se k sobě lepily.



Obr. 4. Viskózní tok vody pod prknem.

Newton měřil také sílu, kterou působil na prkno. Stejnou silou působilo prkno na vodu, když ji rozhýbávalo. Tuto sílu vydělil plochou prkna a získal jakousi plošnou hustotu tečné síly působící na hladinu:

$$\sigma_t = \frac{F}{S}.$$

(Takovéto plošné hustotě tečné síly říkáme tečné napětí.)

Pečlivým měřením Newton zjistil, že napětí τ je přímo úměrné poklesu rychlosti v_x směrem do hloubky (ve směru osy y – viz obr. 4):

$$\sigma_t \sim \frac{dv_x}{dy}.$$

Můžeme tedy napsat:

$$\sigma_t = \eta \frac{dv_x}{dy},$$

kde konstantu úměrnosti η nazýváme *dynamickou viskozitou* (její jednotkou je Pa·s).

Kapalině, pro jejíž proudění platí předchozí rovnice, říkáme Newtonovská kapalina a takto popsáný tok kapaliny nazýváme viskózním tokem.

Převrácenou hodnotou dynamické viskozity je *tekutost*. Tekutost φ zavádíme vztahem:

$$\varphi = \frac{1}{\eta}.$$

Kromě dynamické viskozity η se také můžete setkat s viskozitou kinematickou ν . Ta je definována jako poměr dynamické viskozity a hustoty kapaliny:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}.$$

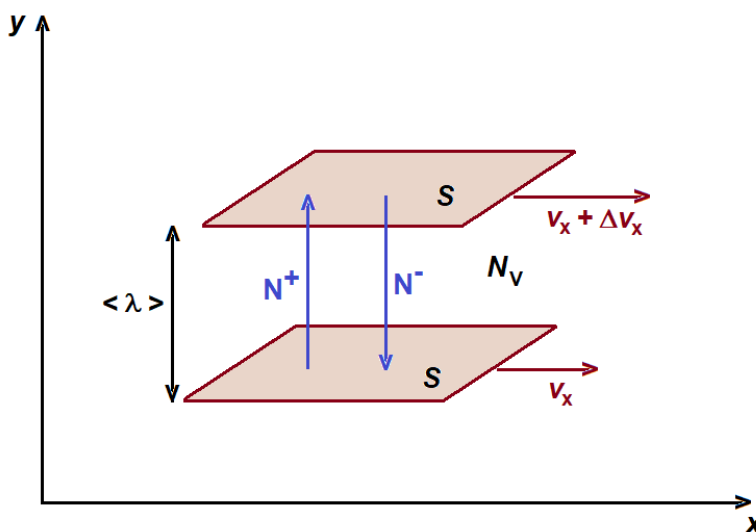
Jednotkou kinematické viskozity je m^2s^{-1} .

V dalším textu se budeme zabývat viskózním tokem plynu. Budeme předpokládat, že pro viskózní tok plynu platí totéž, co pro viskózní tok newtonovské kapaliny. I zde tedy bude platit rovnice:

$$\sigma_t = \eta \frac{dv_x}{dy}. \quad (5)$$

Dynamickou viskozitu η se pokusíme vyjádřit pomocí mikroskopických veličin charakterizujících plyn.

I v případě proudících plynu budeme předpokládat, že v něm jsou vrstvy pohybujícího se plynu, které na sebe působí silami (navzájem se urychlují, nebo brzdí). Tyto síly mezi sousedními vrstvami plynu jsou realizovány srážkami molekul.

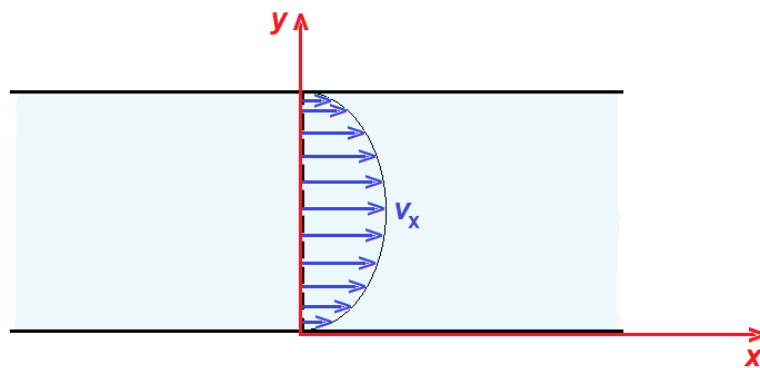


Obr. 6. Schéma viskózního toku.

Na obrázku 6 jsou znázorněny dvě vrstvy proudícího plynu. Obě se pohybují ve směru osy x . Nižší vrstva se pohybuje rychlostí v_x vyšší rychlostí o Δv_x větší. Vzdálenost mezi vrstvami je rovna střední volné dráze $\langle \lambda \rangle$. Molekuly se i v proudícím plynu chaoticky pohybují, Jenom jsou při tomto chaotickém pohybu unášeny jedním směrem (v našem případě daném směrem osy x).

Molekuly si můžete představit jako stádo ovcí na pastvě. Chaoticky pobíhají po louce a pasou se. Když je večer ovčák zahání do bezpečí salaše, nahánějí ovčáčí psi stádo určitým směrem. Ovce přitom nepochodují v zástupu, ale neustále pobíhají všemi směry a hledají trávu k ukousnutí. Celé chaotické stádo se ale ubírá správným směrem.

V případě proudících plynu si představte např. trubici, nebo hadici, do které je kompresorem vháněn vzduch (nebo raději nějaký jiný plyn, abychom nemuseli brát do úvahy různé druhy molekul, které jsou ve vzduchu). Představíme si tedy trubici, do které je vháněn argon. Taková trubice s proudícím argonem je častou součástí fyzikálních aparatur. Argon (netečný plyn) se používá jako ochranná atmosféra. Podobně jako tekoucí voda i proudící plyn se „lepí“ na stěnu trubice, u které má nulovou rychlost a směrem k jejímu středu se rychlost zvětšuje. Z pozorování víme, že velikost rychlosti proudění plynu má „parabolický průběh“ (obr. 7).



Obr. 7. „Parabolický průběh“ proudění plynu v trubici.

Pro nás budou nejzajímavější ty molekuly, jejichž složka chaotického pohybu je právě ve směru osy y (nebo proti němu). Molekuly doletí v průměru do vzdálenosti $\langle \lambda \rangle$. Pokud molekula „startuje“ z dolní vrstvy na obr. 6, dostane se svým volným pohybem právě do vyšší vrstvy, kde se srazí s molekulou z této vrstvy. Protože si z nižší vrstvy nese složku rychlosti v_x a srazí se s molekulou jejíž složka x -ové rychlosti je $v_x + \Delta v_x$, způsobí tato srážka zmenšení rychlosti „atakované“ molekuly. Tímto způsobem si na mikroskopické úrovni vysvětlujeme zpomalování rychlejší vyšší vrstvy pomalejší vrstvou nižší. Samozřejmě, že pouhá jedna molekula by pozorovatelné zpomalení celé vrstvy nevysvětlila. Molekul, které takto pronikají z nižší do vyšší vrstvy je ale velké množství a ke zpomalení rychlosti vrstvy tímto mechanismem dochází. Podobně je tomu, když rychlejší molekuly z vyšší vrstvy „atakují“ molekuly vrstvy nižší. V tomto případě dochází k urychlování dolní vrstvy proudícího plynu.

Výsledkem těchto dějů by bylo vyrovnání rychlostí vrstev navzájem, a nakonec i srovnání rychlostí vrstev s tou, která se dotýká stěny trubice a je tedy vůči trubici v klidu. Aby se proudící plyn tímto mechanismem nezastavil, potřebujeme čerpadlo (kompresor, který proudění udržuje).

Z uvedeného kvalitativního rozboru tohoto transportního děje vyplývá, že molekuly, které přechází mezi znázorněnými vrstvami (samozřejmě i mezi vrstvami ostatními) si při srážkách předávají hybnost. Molekuly, které prochází (v obr. 6) shora dolů zvyšují hybnost dolní vrstvy a naopak, molekuly unikající z dolní vrstvy směrem ke středu trubky (v obrázku 6 nahoru) snižují hybnost vyšší vrstvy. Je tedy jasné, proč při tomto transportním ději hovoříme o přenosu hybnosti a „vysvítá“ také, jakým mechanismem vysvětlit dynamickou viskozitu (ta kvantifikuje vnitřní tření v proudícím plynu).

Na proces, který jsme právě rozebrali, se teď podíváme kvantitativně (napíšeme příslušné vztahy a pokusíme se zjistit, co na mikroskopické úrovni platí pro dynamickou viskozitu η).

I když víme, že průběh x -ových složek rychlosti molekul je parabolický, na kratičké vzdálenosti mezi vrstvami, dané střední volnou drahou, je nárůst rychlosti v podstatě lineární (uvažujeme tlak přibližně rovný normálnímu atmosférickému tlaku a střední volná dráha je tedy rovná několika desítkám nanometrů). Pro zvětšení x -složky rychlosti na vzdálenosti $\langle \lambda \rangle$ ve směru osy y můžeme napsat:

$$\Delta v_x = \frac{dv_x}{dy} \langle \lambda \rangle.$$

S tím je spojen přenos hybnosti (jednou molekulou):

$$\Delta p_x = m \langle \lambda \rangle \frac{dv_x}{dy},$$

(jde o přenos „přírůstku“ velikosti x -ové složky hybnosti).. Tuto změnu velikosti hybnosti transportují jak molekuly jdoucí ve směru osy y , tak i molekuly jdoucí proti směru y .

Tok částic směrem nahoru (myšleno v orientaci dané obrázkem 6) je:

$$N_{\xi}^+ = S \langle v_y \rangle \tau N_V,$$

kde N_V má svůj obvyklý význam, S je velikost plochy kolmé k ose y , kterou se tok uskutečňuje, τ je střední doba mezi srážkami a $\langle v_y \rangle$ je střední hodnota velikosti y -ové složky rychlosti molekul (index ξ zdůrazňuje, že jde o tok částic, nikoli hybnosti).

Podobně v opačném směru:

$$N_{\xi}^- = S \langle v_y \rangle \tau N_V.$$

Výsledný tok částic mezi námi vybranou dvojicí proudících vrstev je součtem těchto dvou toků:

$$N_{\xi} = N_{\xi}^+ + N_{\xi}^- = 2 S \langle v_y \rangle \tau N_V. \quad (6)$$

Celkový tok přírůstku velikosti hybnosti Δp_x získáme tak, že tok částic vynásobíme změnou velikosti hybnosti přenášené jednou molekulou:

$$N_{\Delta p_x} = 2 S \langle v_y \rangle \tau N_V \cdot m \langle \lambda \rangle \frac{dv_x}{dy}. \quad (7)$$

Přejdeme k vyjádření hustoty toku změny velikosti hybnosti:

$$i_{\Delta p_x} = \frac{N_{\Delta p_x}}{S \tau} = 2 \langle v_y \rangle N_V m \langle \lambda \rangle \frac{dv_x}{dy}.$$

Stejně jako u difúze použijeme vztah mezi střední hodnotou velikosti složky rychlosti a střední rychlostí:

$$\langle v_y \rangle = \frac{1}{4} \langle v \rangle.$$

Pro hustotu toku změny velikosti hybnosti potom dostaneme:

$$i_{\Delta p_x} = \frac{1}{2} \langle v \rangle N_V m \langle \lambda \rangle \frac{dv_x}{dy}.$$

Všimněte si výrazu $N_V m$. Je to hustota částic (počet molekul v krychlovém metru) násobená hmotností částice. To je ale hmotnost molekul obsažených v krychlovém metru plynu, tedy jeho hustota ρ .

Vztah pro hustotu toku $i_{\Delta p_x}$ tedy přejde na tvar:

$$i_{\Delta p_x} = \frac{1}{2} \langle v \rangle \rho \langle \lambda \rangle \frac{dv_x}{dy}. \quad (8)$$

Podle definice je hustota toku dána tokem děleným velikostí plochy a časem:

$$i_{\Delta p_x} = \frac{\Delta p_x}{S \Delta t}.$$

Změnu hybnosti Δp_x napíšeme jako:

$$\Delta p_x = F_x \cdot \Delta t,$$

což plyne z 2. Newtonova zákona.

Pro hustotu toku $i_{\Delta p_x}$ potom dostáváme:

$$i_{\Delta p_x} = \frac{F_x \Delta t}{S \Delta t} = \frac{F_x}{S} = \sigma_t. \quad (9)$$

Ve vztahu (9) jste jistě poznali tečné napětí, o kterém byla řeč na začátku.

Hustota toku změny velikosti x-ové složky hybnosti se ukazuje být tímtéž, čím je tečné napětí v proudící kapalině. Rovnici (8) tedy přepíšeme do tvaru:

$$\sigma_t = \frac{1}{2} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho \frac{dv_x}{dy}.$$

To je ale rovnice nápadně podobné té, kterou získal Isaac Newton pro viskózní tok kapaliny:

$$\sigma_t = \eta \frac{dv_x}{dy}.$$

Porovnáním předchozích dvou rovnic získáme vztah, který je mikroskopickou interpretací dynamické viskozity:

$$\eta = \frac{1}{2} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho. \quad (10)$$

S uvážením dříve odvozeného vztahu pro součinitel difúze D lze napsat:

$$\eta = \frac{1}{2} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho = D \rho.$$

Ještě rozmyslíme, jak zapsat hustotu toku přírůstku velikosti x-ové složky hybnosti molekul ve vektorovém tvaru. Uvědomíme-li si, že přírůstek složky hybnosti je přenášen proti gradientu x-ové složky rychlosti (složka rychlosti roste v obr. 6 směrem nahoru, přídavné zvětšení hybnosti je ale přenášeno směrem dolů (z rychlejší do pomalejší vrstvy) můžeme napsat:

$$\overline{v_{\Delta p_x}} = -\frac{1}{2} \langle v \rangle N_V m \langle \lambda \rangle \frac{dv_x}{dy}.$$

Možná vás napadá otázka, jestli i tady existuje nějaké přesnější teorie. Existuje. Preciznější model viskózního toku plynu vede k výrazu:

$$\eta = 0,499 \cdot \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho.$$

Jak vidíte, úsilí vynaložené k přesnější mikroskopické formulaci dynamické viskozity, by se nám příliš nevyplatilo...

Do vztahu (10) dosadíme za $\langle v \rangle$ a $\langle \lambda \rangle$:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m}},$$

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}r^2 N_V}.$$

Pro dynamickou viskozitu potom dostaneme:

$$\eta = \frac{1}{4\pi r^2} \sqrt{\frac{mk_B T}{\pi}}. \quad (11)$$

Tento výsledek je možná trochu překvapivý. Dynamická viskozita, jak je vidět, nezávisí na tlaku a hustotě plynu. Zdůvodnit si to můžeme tak, že při menší hustotě přeskakuje mezi vrstvami méně molekul, je zde ale delší střední volná dráha, a proto je s každým přeskokem spojen větší přenos hybnosti.

Tento výsledek byl experimentálně potvrzen za podmínek, kdy lze plyn považovat za ideální. Při velkých hustotách dynamická viskozita s hustotou roste. Při malých tlacích začne viskozita s poklesem tlaku klesat. Nastává to ale při tak malých tlacích, při nichž je střední volná dráha srovnatelná s průměrem trubice. V tom případě ale náš model s vrstvami pohybujícími se různými rychlostmi přestává být použitelný.

Pro konkrétnější představu o závislosti η na tlaku plynu se podíváme např. na výsledky měření pro CO₂:

Při normálním tlaku je $\eta=14,9 \cdot 10^{-6}$ Pa·s, při tlaku 300 Pa (což je přibližně 330 x menší tlak) je dynamická viskozita $\eta=14,7 \cdot 10^{-6}$ Pa·s.

Dynamickou viskozitu lze velmi přesně měřit. Pohledem na vzorec (11) zjistíme, že při dostatečně přesném změření teploty a známé hmotnosti molekuly můžeme pomocí hodnoty η určit poloměr molekuly daného plynu.

Měření teplotní závislosti dynamické viskozity odhalila, že η roste s teplotou poněkud rychleji, než předpokládá vzorec (11). Neplatí tedy přesně závislost $\eta \sim \sqrt{T}$. To je ale v souladu s hlubšími výsledky teorie srážek reálných molekul. Tam platí tzv. Sutherlandův vzorec, který určuje efektivní průměr d molekuly při srážkách, pro který platí:

$$d^2 = d_\infty^2 \left(1 + \frac{A}{T} \right),$$

kde d_∞ , A , jsou empirické konstanty, T termodynamická teplota.

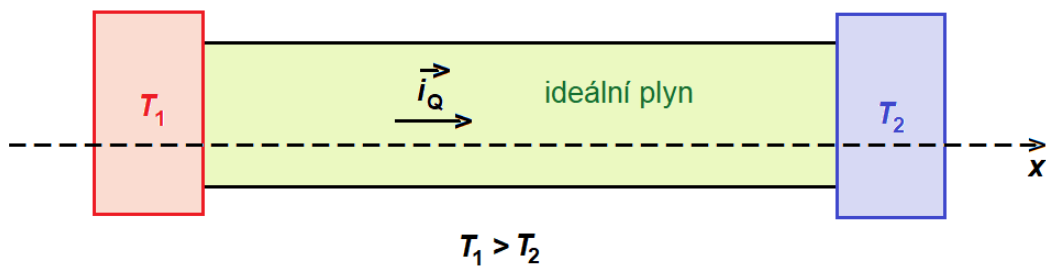
Molekuly nemůžeme považovat za pevné srážející se kuličky. Ve skutečnosti se při srážkách deformují. Čím větší je relativní rychlost molekul při srážce, tím hlouběji pronikají navzájem

do svých silových polí. Efektivní průměr proto závisí na rychlosti molekul při srážce. Ve vzorci (11) tedy nemůžeme považovat r za konstantní a tím lze vysvětlit malou experimentálně zjištěnou odchylku od závislosti $\eta \sim \sqrt{T}$.

TEPELNÁ VODIVOST PLYNŮ

Posledním z transportních dějů, kterým se budeme zabývat, je tepelná vodivost plynů. Při tomto transportním ději přenáší plyn energii.

Představme si trubici s plynem, která je vyrobena z dokonalého tepelného izolantu. Levou stranu trubice budeme udržovat na teplotě T_1 , pravou na teplotě T_2 ($T_1 > T_2$).



Obr. 1. Schématický náčrt řešeného problému.

Trubicí zleva doprava prochází tepelný tok, pro jehož hustotu \vec{i}_Q z definice plyne:

$$|\vec{i}_Q| = \frac{Q}{Sdt},$$

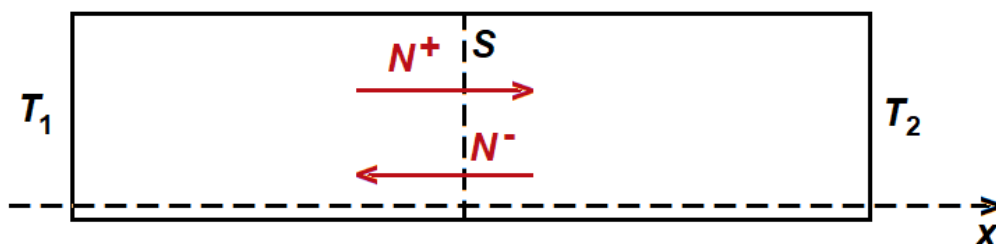
kde Q je množství tepla přenášené průřezem S , kolmým k ose trubice za čas dt .

Lze předpokládat, že hustota tepelného toku bude úměrná gradientu teploty, protože teplota je mírou vnitřní energie plynu. Pro hustotu tepelného toku tedy platí:

$$\vec{i}_Q = -\lambda \frac{dT}{dx}. \quad (1)$$

Konstanta úměrnosti λ ve vztahu (1) se nazývá **součinitelem tepelné vodivosti**. Jeho jednotkou je $\text{W} \cdot \text{m}^{-1}$ (popřípadě $\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$).

Stejně jako v předcházejících případech se i nyní pokusíme najít mikroskopickou interpretaci součinitele tohoto transportního děje (tedy součinitele tepelné vodivosti λ).



Obr. 2. schématický náčrt toků částic.

Molekuly teplejšího plynu v levé části trubice mají větší střední kvadratickou rychlost a nesou větší energii než molekuly vpravo, kde má plyn nižší teplotu. Poté, co molekula proletí svou volnou dráhu, srazí se s další molekulou. Molekuly, které se pohybují ve směru osy x se srážejí s molekulami, které mají menší kinetickou energii a jejich kinetická energie se zmenšuje. Molekuly postupující proti ose x se naopak srážejí s molekulami majícími větší kinetickou energii a jejich energie se srážkami zvětšuje (máme na mysli střední hodnoty kinetických energií molekul). Kdybychom neudržovali stálý rozdíl teplot mezi konci trubice, teplota by se časem v celé trubici ustálila na jedné hodnotě (nastala by termodynamická rovnováha).

Tok částic ve směru osy x , který nese větší energii je stejný jako tok částic proti ose x (ten nese menší energii). Tok částic a tok energie jsou dvě různé věci (i když tok energie je na tok částic vázán). Vzhledem k chaotičnosti pohybu molekul musí být samozřejmě průměrný počet částic, které se přesouvají doprava stejný, jako počet částic jdoucích doleva. Jinak by se plyn začal „hromadit“ na jedné straně trubice. Vyjádříme tedy nejprve toky částic a potom na ně „navážeme“ přenášenou energii. Toky nás zajímají ve směru osy trubice, tedy ve směru rovnoběžném s osou x .

Tok částic N_{ξ}^+ (obr. 2) vybraným místem trubice je stejný jako tok částic N_{ξ}^- tímto místem:

$$N_{\xi}^+ = N_{\xi}^- = S \langle v_x \rangle \tau N_V,$$

kde S je velikost průřezu trubice, $\langle v_x \rangle$ střední hodnota velikosti x -ové složky rychlosti molekul v daném místě, τ střední doba mezi srážkami molekul a N_V hustota molekul v trubici.

Celkový tok částic vybraným průřezem trubice je:

$$N_{\xi} = 2 S \langle v_x \rangle \tau N_V.$$

Odpovídající hustota toku částic (její velikost) je:

$$i_{\xi} = \frac{N_{\xi}}{S\tau} = 2 \langle v_x \rangle N_V.$$

V textu k předchozí přednášce jsme si ukázali, že platí:

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{4} \langle v \rangle.$$

Pro velikost hustoty toku částic nakonec získáme vztah:

$$i_{\xi} = \frac{1}{2} \langle v \rangle N_V. \quad (2)$$

Průměrný rozdíl energií mezi vrstvami plynu (kolnými k ose trubice) vzdálenými o střední volnou dráhu $\langle \ell \rangle$ vyjádříme jako:

$$\Delta \varepsilon_k = \langle \ell \rangle \frac{d\varepsilon_k}{dx}.$$

Pravou stranu rovnice vynásobíme jedničkou ve tvaru dT/dT :

$$\Delta \varepsilon_k = \langle \ell \rangle \frac{d\varepsilon_k}{dx} \frac{dT}{dT},$$

a rovnici můžeme formálně přepsat na tvar:

$$\Delta \varepsilon_k = \langle \ell \rangle \frac{d\varepsilon_k}{dT} \frac{dT}{dx}. \quad (3)$$

Uvědomíme-li si, že přírůstek energie $d\varepsilon_k$ zprostředkovaný jednou molekulou představuje příspěvek k přenesenému teplu:

$$dQ = mC_V dT,$$

můžeme napsat:

$$d\varepsilon_k = mC_V dT \Rightarrow \frac{d\varepsilon_k}{dT} = mC_V$$

a (3) nabude tvaru:

$$\Delta \varepsilon_k = \Delta Q = \langle \ell \rangle mC_V \frac{dT}{dx}. \quad (4)$$

Velikost hustoty tepelného toku získáme tak, že hustotu toku částic vynásobíme příspěvkem jedné částice k přenášenému teplu danému vztahem (4):

$$i_Q = i_\xi \cdot \Delta Q$$

$$i_Q = \frac{1}{2} \langle v \rangle N_V m \langle \ell \rangle C_V \frac{dT}{dx}.$$

Součin $N_V m$ vyjadřuje hustotu plynu, a předchozí vztah tedy můžeme zapsat ve tvaru:

$$i_Q = \frac{1}{2} \langle v \rangle \rho \langle \ell \rangle C_V \frac{dT}{dx}.$$

Vezmeme-li v úvahu, že k přenosu tepla dochází proti gradientu teploty (teplo přechází z teplejšího tělesa na těleso studenější) získáme pro hustotu tepelného toku rovnici:

$$\vec{i}_Q = -\frac{1}{2} \langle v \rangle \langle \ell \rangle \rho C_V \frac{dT}{dx}. \quad (5)$$

Porovnáním vztahů (5) a (1) dostaneme hledané mikroskopické vyjádření součinitele tepelné vodivosti:

$$\lambda = \frac{1}{2} \langle v \rangle \langle \ell \rangle \rho C_V. \quad (6)$$

Mezi součiniteli probraných transportních dějů platí vztahy:

$$\lambda = \eta C_V = \rho C_V D$$

Při rozboru tepelné vodivosti jsme mlčky předpokládali, že v plynu platí Maxwellovo rozdělení rychlostí molekul (např. vztahy pro střední hodnotu velikosti složky rychlosti a pro střední rychlost jsou odvozeny za pomoci Maxwellova rozdělení). Otázkou ale je, zda je Maxwellovo rozdělení rychlostí na plyn při tepelné vodivosti aplikovatelné. Maxwellovo rozdělení rychlostí totiž platí pro plyn v termodynamické rovnováze. To zde ale splněno nebylo. Plyn v trubici má v různých místech různou teplotu a dochází v něm k toku tepla, což je v rozporu s podmínkami termodynamické rovnováhy. K výsledku našeho rozboru tepelné vodivosti tedy musíme přistupovat opatrně.

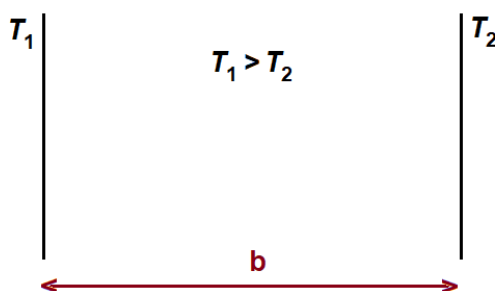
Přesnější teorie a experimenty dávají pro součinitel tepelné vodivosti vztah:

$$\lambda = 1,261 \cdot \langle v \rangle \langle \ell \rangle \rho C_V.$$

Náš zjednodušený model a přesnější model se liší v multiplikačním faktoru (0,5 v případě zjednodušeného modelu a 1,261 v případě přesnějšího modelu). Oba přístupy ale ukazují, že součinitel tepelné vodivosti, je až na číselnou konstantu dán stejným výrazem $\langle v \rangle \langle \ell \rangle \rho C_V$. Z tohoto hlediska byl náš rozbor tohoto transportního děje úspěšný.

Podobně jako u dynamické viskozity je součinitel tepelné vodivosti nezávislý na tlaku. Nezávislost na tlaku ale neplatí pro velmi nízké tlaky. Čím je to způsobeno?

Představme si dvě desky jejichž teploty jsou T_1 a T_2 ($T_1 > T_2$).



Obr. 3. Přenos tepla mezi dvěma deskami.

Při snižování tlaku plynu mezi deskami roste střední volná dráha molekul. Dokud je střední volná dráha podstatně menší než vzdálenost desek, je tepelná vodivost na tlaku nezávislá. Mechanismus vedení tepla je stejný, jako v předchozím rozboru.

Jakmile je ale střední volná dráha srovnatelná se vzdáleností desek, nebo je dokonce větší, mechanismus vedení tepla se změní. Molekuly přechází od jedné desky ke druhé bez vzájemných srážek a přenášejí teplo přímo z teplejší desky na desku studenější. Přenesené teplo tedy závisí na počtu molekul, je závislé na hustotě molekul N_V . Hustota molekul je přímo úměrná tlaku. Při snižování tlaku od hodnoty, při které je $\langle \ell \rangle \sim b$ tedy klesá s tlakem i tepelná vodivost.

Odvodíme vztah mezi součinitelem tepelné vodivosti a tlakem plynu v případě, že platí $\langle \ell \rangle = b$:

Pro tlak plynu platí vztah, který jsme odvodili už v první přednášce:

$$p = \frac{1}{3} N_V m \langle v^2 \rangle.$$

Po dosazení za $\langle v^2 \rangle$:

$$p = \frac{1}{3} N_V m \frac{3k_B T}{m} = \frac{1}{3} \rho \frac{3k_B T}{m} = \rho \frac{k_B T}{m},$$

z čehož vyplývá, že

$$q = \frac{m}{k_B T} \cdot p. \quad (7)$$

Dále platí:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m}} \quad (8)$$

a

$$\langle \ell \rangle = b. \quad (9)$$

Dosazením (7), (8) a (9) do vztahu (6) a po úpravách dostaneme:

$$\lambda = \frac{4 C_V}{\pi \langle v \rangle} b \cdot p. \quad (10)$$

Je tedy vidět, že při dostatečně nízkém tlaku platí $\lambda \sim p$. Ze vztahu (10) navíc vyplývá, že $\lambda \sim C_V$. Tepelná vodivost je tedy závislá na druhu plynu.

Výsledku (10) se používá při konstrukci Dewarových nádob (termosek). Ty mají dvojitě stěny, mezi nimiž je velmi nízký tlak, takže vzdálenost zdvojených stěn je větší než volná dráha molekul plynu mezi nimi (bývá tam téměř vakuum). Tepelná vodivost dvojitě stěny Dewarovy nádoby je velmi malá, a proto je vnitřek těchto nádob velmi dobře tepelně izolovaný.

**) Tvorba materiálu byla podpořena z Fondu vzdělávací politiky MŠMT na rok 2020, projekt Podpora zkvalitnění přípravy učitelů matematiky, fyziky a informatiky na MFF UK.*