# Několik poznatků z teorie pravděpodobnosti *)

## Hustota pravděpodobnosti

Představte si, že házíte kostkou (např. klasickou šestistěnnou). Pravděpodobnost, že padne vybrané „číslo“, např. jednička, dvojka... je

$$P_1 = P_2 = \cdots = P_6 = \frac{1}{6}.$$

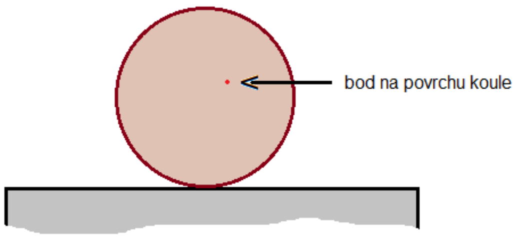
Pokud by „kostka“ měla $s$ stěn (spíše bychom měli mluvit o pravidelném $s$-stěnu), byly by odpovídající pravděpodobnosti

$$P_1 = P_2 = \cdots = P_s = \frac{1}{s},$$

platí přitom

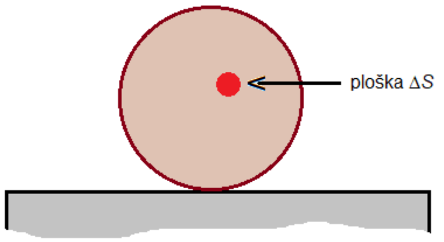
$\sum_{i=1}^{s} P_i = 1$ (tím je vyjádřeno, že „něco padne“).

Jak by to bylo, kdybychom místo házení kostkou kutáleli koulí? Předpokládáme, že bychom měli dokonalou tuhou kouli, která by se kutálela po dokonale rovném a tuhém stole. V tom případě by se koule stolu dotýkala vždy právě v jednom bodě.
Na kouli si označíme jeden bod a ptáme se, jaká je pravděpodobnost, že se koule zastaví tak, že se právě tímto bodem dotkne stolu.




Na kouli můžeme nahlížet jako na pravidelný $s$-stěn, pro který platí $s \to \infty$. Hledaná pravděpodobnost je v tomto případě nulová. Počet bodů na povrchu koule jde k nekonečnu, tedy pravděpodobnost jde k nule. (Možná Vás napadá, že koule se ale zastaví tak, že některý její bod na jejím povrchu se stolu dotýká. Přitom pravděpodobnost toho, že se dotkne stolu je nulová... Je to nějaké divné...)

Ptát se na pravděpodobnost toho, že se vybraný bod na povrchu koule dotkne stolu, nemá moc velký smysl. Můžeme se ale zeptat, s jakou pravděpodobností se stolu po zastavení koule dotkne ploška $\Delta S$, kterou si na povrchu koule zvolíme. V tomto případě




pravděpodobnost určíme jako $P_{\Delta S} = \frac{\Delta S}{S}$, kde $S$ je velikost povrchu koule. Pravděpodobnost bude záviset na tom, jak velkou plošku zvolíme.
Poměr $P_{\Delta S}/\Delta S$ nazveme hustotou pravděpodobnosti a označíme ho $\rho_{\Delta S}$. Pro hustotu pravděpodobnosti v tomto našem případě tedy platí(po uvážení výše uvedených vztahů):

$$\frac{P_{\Delta S}}{\Delta S} = \rho_{\Delta S} = \frac{1}{S}.$$

Jak je vidět, hustota pravděpodobnosti $\rho_{\Delta S}$ nezávisí na volbě $\Delta S$.

Pravděpodobnost toho, že se koule zastaví na desce stolu tak, že v dotyku se stolem bude některý bod plošky $\Delta S$ lze vypočítat tak, že velikost této plošky vynásobíme hustotou pravděpodobnosti $\rho_{\Delta S}$:

$$P_{\Delta S} = \rho_{\Delta S} \cdot \Delta S$$

(tedy $P_{\Delta S} = \frac{1}{S}\Delta S = \frac{\Delta S}{S}$, což odpovídá naší definici pravděpodobnosti).

Hustotu pravděpodobnosti jsme si představili na názorném příkladu s koulí. V dalším studiu molekulové fyziky se s hustotou pravděpodobnosti budeme setkávat při řešení různých situací.

**Některé další pojmy z teorie pravděpodobnosti**

Připomeneme si ještě několik pojmů z teorie pravděpodobnosti.

Představme si, že provádíme nějaké náhodné pokusy. Je jich celkem $N$. Při těchto pokusech získáváme různé výsledky, z nichž $N_i$ jsou z našeho hlediska příznivé výsledky. Počet těchto příznivých výsledků vydělený celkovým počtem výsledků nazveme relativní četností i-tého náhodného jevu:

**relativní četnost i-tého náhodného jevu:** $w_i = \frac{N_i}{N}$**.**

**Pravděpodobnost i-tého náhodného jevu**, tedy pravděpodobnost toho, že nastane po nás z nějakého důvodu zajímavý výsledek, se určí takto:

$$P_i = \lim_{N \to \infty} \frac{N_i}{N}.$$

Budete-li tedy např. házet klasickou hrací kostkou (třeba ze hry Člověče nezlob se) a budete chtít, aby relativní četnost hodu šestky byla rovna 1/6, budete muset uskutečnit velmi velmi velký počet hodů kostkou. Pokud bude hodů třeba jenom deset, může se stát, že šestka padne čtyřikrát, nebo třeba vůbec. (Když jsem hrával Člověče nezlob se, připadalo mi, že v mém případě šestka nepadá nikdy, ale když hází protihráči, tak padá šestka skoro pořád...) Pokud byste hodili kostkou tisíckrát a zapisovali si, kolikrát padla šestka asi by se to šestině blížilo, kdybyste házeli milionkrát, k šestině případů byste se dostali velmi blízko, ale teprve při nekonečném počtu hodů byste se na šestinu mohli spolehnout.

Jak je to v případě **spojité veličiny**?
Takovou spojitou veličinou je např. rychlost pohybu molekuly. Ta může nabývat libovolných hodnot (z hlediska klasické fyziky). Platí pro ni tedy:

$$v \in (-\infty, +\infty).$$

Jaká je pravděpodobnost toho, že náhodně vybraná molekula bude mít rychlost právě $v$? Ano... je to nula. Vybíráme totiž jednu konkrétní hodnotu z nekonečného počtu. Takovou otázku si tedy ani nepokládejme, ale zeptejme se raději s jakou pravděpodobností bude rychlost molekuly spadat do určitého intervalu rychlostí. Potom už bude pravděpodobnost tohoto „jevu“ nenulová:

$$P(v, v + \Delta v) \neq 0$$

Hustotu pravděpodobnosti (pro výpočet rychlosti) v tomto případě zavedeme jako:

$$\rho(v) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{P(v, v+\Delta v)}{\Delta v} .$$

Známe-li hustotu pravděpodobnosti $\rho(v)$, určíme pravděpodobnost toho, že náhodně vybraná molekula bude mít rychlost z intervalu $(v, v + \Delta v)$ pomocí vztahu:

$$P(v, v + \Delta v) = \rho(v) \cdot \Delta v .$$

Platí ještě jeden důležitý vztah, tzv. **normovací podmínka**. Tato podmínka říká, že pravděpodobnost toho, že molekula má rychlost z intervalu všech možných hodnot je 1. Jinak řečeno, je jisté, že molekula má nějakou rychlost. Normovací podmínku zapíšeme takto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(v)\, dv = 1 .$$

**Střední hodnota náhodné veličiny**

I toto pro nás bude důležitý pojem. Pokud provádíme náhodné pokusy (náhodná pozorování), zjistíme, že z celkového počtu výsledků $N$ získáme $N_1$ krát výsledek $x_1$, $N_2$ krát výsledek $x_2$ atd. Střední hodnotu výsledku $x$ potom určíme jako

$$\langle x \rangle = \frac{N_1 x_1 + N_2 x_2 + \cdots}{N_1 + N_2 + \cdots} = \frac{1}{N} \sum_{(i)} N_i x_i = \sum_{(i)} \frac{N_i}{N} x_i = \sum_{(i)} P_i x_i$$

V případě spojité veličiny $x$ definované na intervalu $(-\infty,+\infty)$ platí:

$$P(x, x + dx) = dP(x) = \rho(x) dx$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x dP(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \rho(x) dx$$

Tento vztah pro střední hodnotu spojité veličiny v budoucnu několikrát použijeme.

---

*) *Tvorba materiálu byla podpořena z Fondu vzdělávací politiky MŠMT na rok 2020, projekt Podpora zkvalitnění přípravy učitelů matematiky, fyziky a informatiky na MFF UK.*