Obecná teorie relativity: nástin východisek a jejich důsledků

Jak jsme už viděli, speciální teorie relativity je neslučitelná s gravitací. Albert Einstein věnoval řadu let vytvoření **relativistické teorie gravitace**, výsledek představil ke konci roku 1915. Známe ho pod názvem *obecná teorie relativity* (OTR[1]). Od té doby metody a důsledky této teorie rozvíjela řada fyziků. Vyvíjelo a zpřesňovalo se také její testování a fyzikové také samozřejmě vymýšleli alternativní teorie gravitace. I po více než sto letech však obecná teorie relativity zůstává nejlepší známou teorií, kterou pro popis gravitace máme – a nejen úspěchy typu detekce gravitačních vln nás přesvědčují, že jde o teorii, která velmi dobře vysvětluje vlastnosti a propojení gravitace, prostoru a času.

Matematicky jde o teorii výrazně náročnější, než je speciální teorie relativity, proto v následujícím stručném přehledu řadu věcí jen lehce nastíníme, abychom o nich získali alespoň základní představu.[2]

Výchozími principy OTR jsou *princip ekvivalence* a *obecný princip relativity*.

3.1 Princip ekvivalence: začátek

Princip ekvivalence bývá vyslovován v různých formulacích. Pro začátek jej můžeme chápat jako **ekvivalence setrvačné a gravitační hmotnosti**. Co těmito názvy myslíme? Cožpak hmotnost není jedna? Pojďme se na to podívat zatím v rámci klasické mechaniky.

Setrvačná a gravitační hmotnost

Druhý Newtonův zákon

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{1}$$

určuje zrychlení, které má hmotný bod, když na něj působí síla $\vec{F}$. Nebo, řečeno naopak, určuje sílu, kterou musíme působit, aby se nepohyboval jen „volně“, setrvačností[3], ale měl zrychlení $\vec{a}$ [4].

Newtonův gravitační zákon

$$\vec{F}_g = -G\frac{M\,m}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r} \tag{2}$$

určuje gravitační sílu, kterou například Země o hmotnosti M přitahuje hmotný bod[5].

V obou zákonech vystupuje hmotnost daného hmotného bodu m. Ovšem v obou vztazích hraje úplně jinou úlohu! V 2. Newtonově zákoně (1) jde o „odpor vůči urychlování“, v gravitačním zákoně (2) zas o to, jak daný bod reaguje na gravitační pole jiného tělesa – podobně jako v Coulombově zákoně náboj určuje, jakou silou na něj působí elektrické pole. Je vlastně záhadou, proč jak v (1) tak v (2) vystupuje totéž m.

---

[1] Anglicky se tato teorie nazývá *general relativity*, jako zkratka se užívá GR.

[2] Zájemce o bližší seznámení s OTR může najít poučení v řadě populárních i odbornějších publikací. (Zejména v angličtině jich je spousta.)

[3] Tedy rovnoměrně přímočaře vůči inerciálnímu systému.

[4] Vůči inerciálnímu systému, samozřejmě.

[5] r je samozřejmě vzdálenost hmotného bodu od středu Země; Zemi přitom považujeme za kouli a rozložení hmotnosti v ní za sféricky symetrické.

V obou vztazích by mohly vystupovat různé hmotnosti: v (1) **setrvačná hmotnost** m_S a v (2) **gravitační hmotnost** m_g. Příslušné zákony by pak vypadaly následovně:

$$m_S\,\vec{a} = \vec{F} \tag{3}$$

$$\vec{F}_g = -G\frac{M\,m_g}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}\ ^{6}. \tag{4}$$

Po dosazení (4) do (3) a vydělení m_S dostáváme pro velikost zrychlení $a = \dfrac{m_g}{m_S}\cdot\dfrac{GM}{r^2}$. Označíme-li, jak se to běžně dělá[7]

$$G\frac{M}{r^2} \overset{\text{ozn.}}{=} g\ , \tag{5}$$

je velikost zrychlení padajícího tělesa

$$\boxed{a = \frac{m_g}{m_S}\cdot g\ .} \tag{6}$$

To znamená, že pokud by se setrvačná a gravitační hmotnost lišily, padala by různá tělesa s různým zrychlením![8]

V klasické mechanice bereme $m_g = m_S$, takže $a = g$; všechna tělesa padají se stejným zrychlením[9]. Je to ale skutečně pravda?

Všechna tělesa padají se stejným zrychlením – ověřování

K závěru, že různá tělesa padají se stejným zrychlením, došel ze svých pokusů už Galileo Galilei. Z Newtonových zákonů, jak jsme si připomněli, plyne stejné zrychlení pro všechna tělesa, když se gravitační a setrvačná hmotnost rovnají. Sám Newton si ale byl vědom, že tato rovnost není ničím zaručena[10] a že ji tedy musíme brát jako experimentální fakt – a tedy také experimentálně testovat.

Prováděl to porovnáváním period kmitů **kyvadel** z různých materiálů. Známý vztah pro periodu kyvadla[11], $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, se v případě, že setrvačná a gravitační hmotnost by byly různé, změní na

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_S}{m_g}}\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}\ .^{12} \tag{7}$$

[6] Možná vás napadlo, jaký charakter má hmotnost M, tedy např. hmotnost Země vytvářející kolem sebe gravitační pole. Někdy se tato hmotnost označuje jako *aktivní gravitační hmotnost*, zatímco m_g charakterizující, jak na hmotný bod působí gravitační pole, se nazývá *pasivní gravitační hmotnost*. Ale vzhledem k tomu, že jak M tak m_g charakterizují vzájemné gravitační působení, tak se to většinou nerozlišuje; jak M tak m_g jsou gravitační hmotnosti.

[7] Tuto veličinu známe z prvního ročníku a patrně už ze střední školy; víme, že se nazývá ***gravitační zrychlení***.

[8] Pro upřesnění: Různá tělesa by volným pádem padala s různým zrychlením, pokud by měla různý poměr m_g/m_S. (Pokud by byl tento poměr u všech těles stejný, nemělo by smysl setrvačnou a gravitační hmotnost rozlišovat. Úpravou hodnoty G v Newtonově gravitačním zákoně bychom totiž jednoduše dosáhli toho, že m_g=m_S.)

[9] Pro upřesnění: Jde o pád ve vakuu, na tělesa nepůsobí žádné další síly (třeba elektrostatické) a jde o tělesa tak malá, že můžeme zanedbat efekty dané nehomogenitou gravitačního pole.

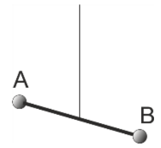
[10] V klasické mechanice tato rovnost neplyne z nějaké hlubší teoretické úvahy.

[11] Jde o matematické kyvadlo délky l.

[12] Zkuste si ho odvodit sami a rozmyslete si, že je logické, že pro větší m_S/m_g je perioda delší.

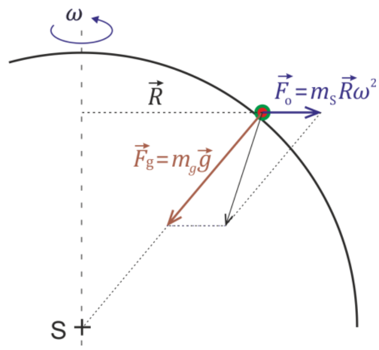
Stejně dlouhá kyvadla z materiálů s různým poměrem m_S/m_g by tedy kývala s různou periodou. Newton žádný rozdíl v periodě nezjistil, svými pokusy tedy potvrdil rovnost $m_S = m_g$; přesnost jeho pokusů byla řádu 10^{-3}. Pokusy s kyvadly využíval později také Bessel, ten dosáhl přesnosti $2{\cdot}10^{-5}$.

Eötvösovy pokusy



Lorand Eötvös[13] ve svých měřeních použil jiné zařízení: **torzní váhy**. Ty díky tenkému závěsu mohou měřit velmi malé síly. Pokud na tělesa A a B působí ve vodorovném směru různé síly, vahadlo se natočí.

Přesně taková situace by ale nastala, pokud by tělesa A a B měla různý poměr setrvačné a gravitační hmotnosti – a pokud tato tělesa budeme mít na rotující Zemi. Gravitační síla táhnoucí tělesa ke středu Země je úměrná gravitační hmotnosti m_g ,

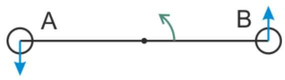


ale **odstředivá síla je úměrná setrvačné hmotnosti** m_S . Tíhová síla daná složením gravitační a odstředivé síly (viz obrázek) tedy bude mít pro tělesa A a B trochu jiné směry. Tím pádem budou na tělesa A a B působit ve vodorovném směru různě velké síly.[14]

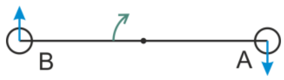
To znamená, že při pokusu v laboratoři (na rotující Zemi) se rameno torzních vah poněkud natočí, pokud jsou poměry m_S/m_g různé.

Samozřejmě, když torzní váhy postavíme, rameno bude nějak natočené. Jak bychom poznali, že za natočení může různý poměr setrvačné a gravitační hmotnosti?

Eötvös to vyřešil jednoduše[15]. Zaznamenal polohu vahadla a celé torzní váhy otočil kolem svislé osy o 180 stupňů. Jak a proč to funguje, ilustrují obrázky vpravo; představují pohled na vahadlo shora (podél závěsu). Řekněme, že těleso A má větší poměr m_S/m_g než těleso B, je tedy více taženo k jihu, viz obrázek.[16] Vahadlo se tedy natočí proti směru hodinových ručiček.



Nyní přístroj otočíme o 180 stupňů. Situaci ukazuje následující obrázek. Těleso A bude opět více taženo směrem k jihu – ovšem tentokrát to znamená, že se vahadlo natočí ve směru hodinových ručiček. To znamená, že při otočení přístroje o 180° se vahadlo vůči přístroji pootočí. Pokud se nepootočí, znamená to, že poměr gravitační a tíhové hmotnosti obou těles je stejný – respektive že případný rozdíl je pod mezí citlivosti přístroje.



Citlivost Eötvösových torzních vah byla velká. V pokusech, jejichž výsledky publikoval v r. 1909[17], byla nejistota výsledků asi $3{\cdot}10^{-9}$.[18] S touto přesností vyšlo, že poměr m_S/m_g je pro tělesa z různých látek stejný[19].

[13] Maďarský fyzik, baron Lorand Eötvös, někdy též uváděný jako Loránd von Eötvös; v Budapešti je po něm pojmenována univerzita.

[14] Zjevně by se tyto síly lišily jen nepatrně, ale citlivé torzní váhy by na rozdíl zareagovaly.

[15] Ale vlastně geniálně, jak uvidíme.

[16] Obrázek si představte orientován stejně jako mapu, tedy sever nahoře (směrem k hornímu okraji stránky). Větší setrvačná hmotnost znamená větší odstředivou sílu, tedy větší sílu směrem od osy Země. V projekci do vodorovného směru to znamená větší sílu směrem na jih. (Pokus děláme na severní polokouli.)

[17] První pokusy tohoto typu prováděl v roce 1889; největší přesnosti dosáhl v pokusech z let 1906-1909 se spolupracovníky D. Pékarem a E. Feketem.

[18] Přesnost Eötvösových pokusů se uvádí v rozmezí 10^{-8} až 10^{-9}.

[19] Eötvös přitom používal i tak neobvyklé materiály jako *batavské sklo* nebo *hadodřev*. (Na jedné z relativistických konferencí bylo jako perlička oznámeno, že hadodřev je druh dřeva, z něhož se vyráběly balalajky.)

Další zpřesňování

Podobný experiment provedli v roce 1964 Dicke[20], Krotkov a Roll na univerzitě v Princetonu. Setrvačnou silou, která se v jejich pokusu uplatnila, však nebyla odstředivá síla daná rotací Země, ale obíháním Země kolem Slunce.[21] Se svými torzními vahami nemuseli točit – jedenkrát za 24 hodin se s nimi otočila celá Země. Vahadlo jejich torzních vah mělo tvar trojúhelníku, v jeho vrcholech byla tělesa ze zlata a hliníku. Přesnost jejich měření dosahovala až neuvěřitelné hodnoty 10^{-11}. [22]

V roce 1971 pak v Moskvě Braginski a Panov[23] vylepšili přesnost měření[24] na asi 10^{-12}. V obou experimentech se nenašly žádné rozdíly v poměru setrvačné a gravitační hmotnosti použitých těles.

Provokativní otázka: má zpřesňování smysl?

Má smysl hnát se za stále vyšší a vyšší přesností? Proč chtít vědět, zda různá tělesa padají se zrychlením stejným na dvanáct platných míst?

Má to smysl. Vyšší přesnost a volba použitých materiálů umožňují odpovědět na zajímavé otázky. Mohli bychom se například ptát, jestli se stejným zrychlením padají protony a neutrony. Poměr počtu protonů a neutronů je ale v jádrech zlata a hliníku různý, takže kdyby protony a neutrony padaly s různým zrychlením, na výsledku výše uvedených pokusů by se to projevilo.[25]

Další možná otázka, už trochu zapeklitější: Ze speciální teorie relativity víme, že setrvačná hmotnost částic s rychlostí roste. Ale roste také jejich hmotnost gravitační? V atomech zlata a hliníku se některé elektrony (na slupce K) pohybují různými rychlostmi. Nárůst jejich setrvačné hmotnosti je u hliníku 1,005 a u zlata 1,16. Pokud by gravitační hmotnost elektronů nenarůstala stejně, na výsledcích pokusu Dickeho a kol. by se to projevilo.[26]

Analogicky lze usoudit, že třeba i elektrostatická vazebná energie jádra přispívá jak k setrvačné, tak ke gravitační hmotnosti.

Měření z poslední doby

Abychom neuváděli jen měření skoro půl století stará, zmiňme ještě pokus provedený na oběžné dráze na satelitu s akronymem MICROSCOPE.[27] Dvě tělesa stejného tvaru z různých materiálů (slitin platiny a titanu) jsou v satelitu umístěna volně (takže by se mohla pohybovat s různým zrychlením) a jsou elektrostatickými silami udržována tak, aby se pohybovala po stejné orbitě jako celý satelit.

[20] Robert H. Dicke byl americký astronom a fyzik. Jeho přínos se zdaleka neomezuje jen na zmíněný experiment. (Zkuste si najít jeho stránku na anglické Wikipedii.)

[21] Sami si můžete odvodit, že zrychlení při tomto pohybu je asi 6 mm/s^2.

[22] Celý přístroj byl v podzemí, pohyb vahadla byl sledován opticky, vahadlo bylo elektrostatickými silami vraceno do rovnovážné polohy. Pečlivě byly odstíněny resp. redukovány vlivy vnějších elektrických a magnetických polí, udržována stejná teplota apod. Uvádí se, že přestože tvar vahadla omezoval citlivost na lokální nehomogenity gravitačního pole, výsledky by ovlivnilo i přiblížení samotného experimentátora na vzdálenost menší než dva metry. Tohle opravdu nebyl pokus s jednoduchými pomůckami! ☺

[23] Vladimir B. Braginski a V. I. Panov.

[24] Pro tělesa z hliníku a platiny; jejich vahadlo mělo tvar osmiúhelníka.

[25] Poměr počtu neutronů a protonů je u hliníku 1,08 a u zlata 1,5, takže kdyby protony a neutrony padaly například se zrychlením lišícím se o 1 %, projevilo by se to už v pokusech s kyvadly. Další úvahy už ovšem vyžadují přesnější měření.
Pozn.: Zde uváděné příklady a hodnoty jsou převzaty z knihy Misnera, Thorna a Wheelera *Gravitation*, viz strany 14-17 dané knihy. (Dané stránky si můžete prohlédnout i na Google books.)

[26] Z pokusů Dickeho a Braginského můžeme usoudit, že gravitační hmotnost s rychlostí roste stejně jako setrvačná s přesností řádu 10^{-5}.

[27] Vypustila ho francouzská kosmická agentura CNES v dubnu 2016, mise trvala do října 2018.

Ze sil, kterými je poloha těles vůči satelitu korigována, se určuje, zda tato tělesa padají se stejným nebo různým zrychlením. V roce 2022 byly oznámeny finální výsledky: zrychlení obou těles je stejné s přesností řádu 10^{-15}. [28] [29]

Dosud popsaná měření se týkaly pádu „normální“ hmoty. V minulosti se objevovaly i sporadické úvahy, zda se antihmota s normální hmotou neodpuzuje, takže by třeba v gravitačním poli Země zrychlovala směrem vzhůru. V září 2023 byly publikovány výsledky experimentu v CERNu s atomy antivodíku. Ukazuje se, že v gravitačním poli padají; naměřená data jsou konsistentní s tím, že padají se zrychlením g jako normální hmota.[30]

Shrnutí

Následující tabulka nezahrnuje všechny pokusy ověřující princip ekvivalence[31], dává ale přehled, jak se jejich přesnost od Newtonových dob zvyšovala.

Kdy	Kdo	Přesnost (řádově)
17. století	Newton	10^{-3}
19. století	Bessel	10^{-5}
1889-1909	Eötvös	až 10^{-9}
1964	Dicke, Krotkov, Roll	10^{-11}
1971	Braginski, Panov	10^{-12}
2016-2018	MICROSCOPE	10^{-15}

I při nárůstu přesnosti o více než deset řádů experimenty stále ukazují, že setrvačná a gravitační hmotnost se neliší. To, že různá tělesa padají se stejným zrychlením, není tedy asi náhoda, zřejmě jde o něco opravdu fundamentálního.

Obecná teorie relativity tento fakt vysvětluje. [32] Abychom viděli, jak to činí, podíváme se nejprve na princip ekvivalence z trochu jiného pohledu.

[28] Jinými slovy, jde o přesnost jedna bilióntina promile. Kdybychom takto přesně měřili délky, tak by to znamenalo naměřit sto kilometrů s chybou srovnatelnou s průměrem atomu.

[29] Zájemci si mohou podrobnosti přečíst v článku ve Physics Review Letters (Phys. Rev. Lett. 129, 121102; abstrakt je volně dostupný) na https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.129.121102. Článek je též dostupný na arxiv: https://arxiv.org/abs/2209.15487. Výsledek, který experiment dává pro rozdíl poměru gravitačních a setrvačných hmotností pro tělesa z titanu a platiny, je $(-1{,}5 \pm 2{,}3 \pm 1{,}5)\cdot 10^{-15}$. Přitom první nejistota (± 2,3) udává statistickou chybu, druhá (± 1,5) odhad systematické chyby.

[30] Viz článek v časopise Nature, https://www.nature.com/articles/s41586-023-06527-1 (je Open Access, tedy volně dostupný). Jde o první přímé měření pádu antihmoty; byť je velmi sofistikované, poskytuje výsledky jen s dosti omezenou přesností: zrychlení pádu z něj vychází $(-0{,}75 \pm 0{,}13 \pm 0{,}16)\cdot g$. (Nejistoty udávají statistickou chybu a chybu simulace chování atomů antivodíku v daném pokusu.) V závěru autoři uvádějí, že budoucí měření by mohla být podstatně přesnější. Ovšem už stávající experiment dovoluje vyloučit možnost, že by atomy antivodíku v gravitačním poli Země zrychlovaly směrem nahoru. (Pravděpodobnost, že by výsledky pokusu souhlasily se zrychlováním nahoru o velikosti g, je jen 10^{-15}.)

[31] Další lze najít ve velmi podrobném přehledném článku C. M. Willa *The Confrontation between General Relativity and Experiment* volně dostupném na https://link.springer.com/article/10.12942/lrr-2014-4 (viz Figure 1 v daném článku).

[32] A kdyby se zjistilo, že princip ekvivalence neplatí, musela by se OTR modifikovat. Takovéto návrhy se objevují. Opakovaně se spekuluje o „páté základní fyzikální interakci“ („fifth force“) a fyzikové se snaží její projevy hledat v pokusech Eötvösova typu, dosud se však nic takového spolehlivě neprokázalo.

3.2 Princip ekvivalence: pokračování

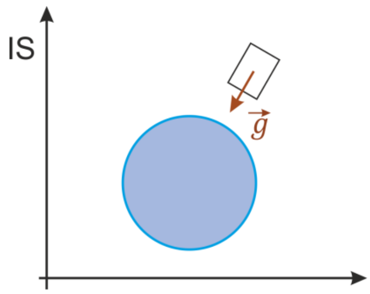
Pokusy tedy ukazují, že všechna tělesa padají se stejným zrychlením. Samozřejmě tím míníme pád na nějakém určitém místě a v jeho malém okolí.[33] Jestliže bychom na tomto místě byli v laboratoři, která by také volně padala, zrychlení daných padajících těles vůči naší laboratoři by bylo nulové. I my sami bychom se v laboratoři volně vznášeli. Prostě a jednoduše: v padající laboratoři by byl **beztížný stav**.

V populárních výkladech se často místo o padající laboratoři mluví o **padajícím výtahu**. Nemusí ovšem jít o výtah, takovou laboratoří může být kosmická loď obíhající kolem Země[34] nebo třeba letadlo při tzv. parabolickém letu, v němž také pasažéři zažívají na krátkou dobu beztížný stav.

Padající výtah a inerciální systémy

V padající laboratoři se tedy tělesa, do nichž nestrkáme ani na ně nepůsobíme např. elektrickým nebo magnetickým polem, pohybují bez zrychlení, čili **rovnoměrně přímočaře**. Trochu formálněji můžeme říci, že *vůči soustavě spojené s padající laboratoří se volné hmotné body pohybují rovnoměrně přímočaře*. Takto se ale v klasické mechanice (i ve speciální teorii relativity) pohybují volné hmotné body vůči inerciálním systémům! Takže můžeme říci, že ***soustava spojená s padající laboratoří je inerciální***.

Padající výtah že je inerciální systém? Není to nesmysl?



Teď asi protestujete. Jak může být systém spojený s padajícím výtahem inerciální? Vždyť se pohybuje zrychleně?

Tato námitka vychází z pohledu klasické mechaniky. V ní vezmeme inerciální systém IS takový, že Země je vůči němu v klidu, viz obrázek.[35] Vůči němu se samozřejmě náš padající výtah pohybuje zrychleně, takže je zřejmé, že systém s ním spojený je neinerciální.

Problém je ovšem v tom, jak určit inerciální systém S. Pro určení inerciálního systému potřebujeme ***volné hmotné body***, tedy hmotné body, na které nepůsobí žádné síly.

Se silami silné a slabé interakce není problém, ty velmi rychle ubývají se vzdáleností a na makroskopických vzdálenostech už nepůsobí. Zbavit se působení elektromagnetických sil můžeme také: prostě vezmeme malá tělesa, na která elektrické a magnetické pole nepůsobí.[36] Druhou možností je elektrická a magnetická pole odstínit. S gravitací ovšem toto udělat nemůžeme – působí na všechna tělesa a navíc ji nelze odstínit[37].

[33] Je jasné, že třeba těleso, které by bylo 6378 km nad severním pólem, by padalo s výrazně menším zrychlením, než těleso na povrchu Země. (To může být drobná otázka pro vaše žáky. S kolikrát menším zrychlením by takovéto těleso vysoko nad severním pólem padalo? Schválně, kolik žáků dokáže správně aplikovat Newtonův gravitační zákon…)

[34] Uvědomte si, že ta je také ve stavu volného pádu! Záběry např. z Mezinárodní kosmické stanice (ISS) ukazují, že tam opravdu panuje beztížný stav.

[35] Teď na chvíli zanedbáme zrychlení Země dané jejím pohybem kolem Slunce. To činí asi 6 mm/s^2; zrychlení našeho padajícího výtahu vůči Zemi je mnohem větší, takže se výtah pohybuje zrychleně i vůči S. (Tím spíš zanedbáme i zrychlení celé sluneční soustavy dané jejím obíháním kolem středu Galaxie, jeho velikost si odhadněte sami.)

[36] Tedy tělesa nenabitá a navíc s nulovými elektrickými a magnetickými momenty.

[37] To je také experimentální fakt.

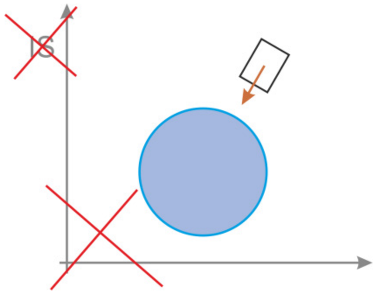
V klasické mechanice jsme tento problém obešli: Řekli jsme, že vezmeme hmotné body tak vzdálené od ostatních těles, že jejich gravitační působení bude zanedbatelné. Ovšem nová teorie gravitace má být relativistická. Z toho mimo jiné plyne, že změny gravitačního pole se musí šířit konečnou rychlostí – můžeme tedy očekávat, že existuje něco jako gravitační vlny. Takže i když jsou všechna tělesa vzdálená, může přijít gravitační vlna (vzniklá třeba v raných fázích vývoje vesmíru) a našimi hmotnými body pohnout.

Z těchto úvah vyplývá na první pohled tristní závěr: Za přítomnosti gravitace nemáme k dispozici žádné volné hmotné body, takže dosavadní definice inerciálního systému je nám k ničemu.

Inerciální systém, jak jsme ho dosud znali – s kartézskými souřadnicemi pokrývajícími celý prostor – byl krásný a v klasické mechanice a speciální teorii relativity[38] nesmírně užitečný. Ale jak vidíme, takovýto **globální inerciální systém** za přítomnosti gravitace fakticky **neexistuje**.

Globální inerciální systém neexistuje!

Inerciálního systému „přes celý prostor" se tedy musíme vzdát, jak to ukazuje obrázek vpravo.



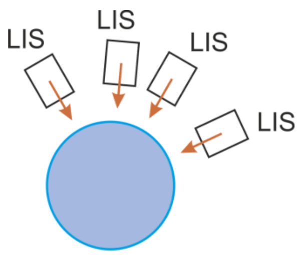
Na celou věc se ale můžeme podívat z optimističtější stránky. Neexistuje-li globální inerciální systém, padá výše uvedená námitka proti tomu, abychom systém spojený s padajícím výtahem brali jako inerciální. Za „volné hmotné body" budeme teď brát hmotné body, na které nepůsobí nic *kromě gravitace*. A ty se vůči výtahu pohybují s nulovým zrychlením, tedy rovnoměrně přímočaře!

Tedy …s jednou výhradou.
V naší úvaze jsme zanedbali slapové síly, tedy nehomogenity gravitačního pole. Viděno ze systému spojeného se Zemí, je u podlahy výtahu trochu větší gravitační zrychlení, než u jeho stropu.[39] A gravitační zrychlení u protilehlých stěn výtahu nejsou přesně rovnoběžná.[40]

Abychom mohli vliv nehomogenity gravitačního pole zanedbat, nesmí být náš padající výtah příliš velký. To znamená, že inerciální systém s ním spojený „funguje pouze lokálně"[41] – proto se pro něj používá název **lokální inerciální systém**.

Lokální inerciální systém (LIS)

Lokální inerciální systém můžeme definovat pro každý bod prostoru a daný čas.[42] Jednotlivé lokální inerciální systémy v různých bodech ovšem nedávají dohromady jeden společný inerciální systém! (Viz obrázek vpravo, šipky udávají zrychlení jednotlivých LIS vzhledem k Zemi.)



[38] A samozřejmě také v elektrodynamice a v nerelativistické i relativistické kvantové fyzice.

[39] V kapitole 2 jsme počítali, jaký je ve velikostech g rozdíl.

[40] Směřují do středu Země a tyto směry se od sebe trochu liší. (Lehce lze spočítat, jak moc.)

[41] A to nejen, pokud se týče prostorových rozměrů, ale i co do času. Konec konců je jasné, že výtah nad zemí nemůže padat libovolně dlouho…

[42] Tedy pro každou událost v prostoročase. Navíc pro danou událost existuje nekonečně mnoho lokálních inerciálních systémů – padající výtah padá v daném bodě a v daném čase s určitým zrychlením, ale může mít různou rychlost. („Padajícím výtahem" je tedy i kosmická loď obíhající planetu, kámen hozený vzhůru apod.)

Podstatné je, že v LIS je (lokálně) beztížný stav, tedy je v něm vlastně „zrušena gravitace“.[43] Ale bez gravitace jsme v situaci, kdy lze uplatnit ***speciální*** teorii relativity (STR)! Tato úvaha otvírá cestu k výrazně obecnější formulaci principu ekvivalence.

Princip ekvivalence – aneb jak se věci dějí v LIS

S trochou zjednodušení bychom obecnější formulaci principu ekvivalence mohli vyjádřit tvrzením:

V lokálních inerciálních systémech platí speciální teorie relativity.[44] [45] (*)

Je vhodné uvědomit si, že jsme tím dosavadní formulaci principu ekvivalence (tvrzení *všechna tělesa padají se stejným zrychlením*) výrazně rozšířili a zobecnili.

Pád se stejným zrychlením (např. vůči Zemi) totiž znamená jen to, že se tělesa, na něž nepůsobí nic jiného než gravitace, budou vůči LIS pohybovat rovnoměrně přímočaře. Toto bývá někdy označováno jako **slabý princip ekvivalence**.

Naopak výše uvedené tvrzení (*), které bývá označováno jako **silný princip ekvivalence**, je skutečně velmi silné tvrzení, týkající se všech fyzikálních jevů a dějů. Je to zobecnění značně odvážné – a odvahu udělat ho měl právě Albert Einstein.[46] Pokusy Eötvösova typu ho vlastně ověřují jen nepřímo. Ovšem je pravda, že pokud by zákony týkající se některých fyzikálních interakcí nevyhovovaly silnému principu ekvivalence, je velmi nepravděpodobné, že by energie těchto interakcí přispívala stejně jak k setrvačné, tak ke gravitační hmotnosti. Takže toto zobecnění zjevně nebylo ukvapené a nerozumné. Navíc testy OTR ověřující různé jeho důsledky, ukazují, že šlo o zobecnění opravdu „prorocké“.

Dodejme ještě, že někdy se používá i název **velmi silný princip ekvivalence**. Myslí se tím skutečnost, že i gravitační vazbová energie tělesa[47] přispívá stejně k jeho setrvačné i gravitační hmotnosti. OTR je teorie „udělaná“ tak, že v ní toto platí. Platnost velmi silného principu ekvivalence je testována pomocí přesných měření vzdálenosti Měsíce od Země pomocí odražeče laserových paprsků umístěného na Měsíci v rámci programu Apollo. Měření stanovují limity na parametr charakterizující daný efekt[48]. V OTR je tento parametr roven nule, v některých alternativních teoriích gravitace je nenulový; dle výsledků dosavadních měření nepřevyšuje 10^{-3}.

Vezměme tedy na základě experimentů a dalších úvah silný princip ekvivalence jako platný a podívejme se na některé jeho důsledky.

---

[43] S výjimkou efektů slapových sil, samozřejmě.

[44] V přesnější formulaci pak: ***V každém bodě prostoročasu existuje lokální inerciální systém, v němž platí stejné fyzikální zákony, jako ve speciální teorii relativity***. (Opět samozřejmě s výjimkou efektů, které jsou dány slapovými silami.)

[45] Chcete naopak názornější, byť ještě méně přesnou obecnější formulaci principu ekvivalence? Mohla by znít:
V padajícím výtahu se vše děje podle STR.

[46] Proto bývá někdy (v poněkud přesnější formulaci) označováno jako *Einsteinův princip ekvivalence*.

[47] Takovou energii by měla i kupa nespojených kamenů dohromady například o velikosti Měsíce – přitahují se, takže kdybyste je chtěli od sebe vzdálit, museli byste vykonat práci.

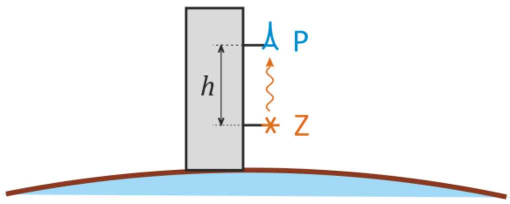
[48] Země a Měsíc mají různou vazbovou gravitační energii (její příspěvek k celkové hmotnosti se liší na úrovni 10^{-10}), takže pokud by velmi silný princip ekvivalence neplatil, „padala“ by tato tělesa ke Slunci s různým zrychlením a projevilo by se to na dráze Měsíce kolem Země. (Pro zájemce: Jev, který by nastal, se nazývá *Nordtvedtův efekt*; pod tímto názvem si o něm můžete dohledat podrobnější informace.)

3.3 Důsledky principu ekvivalence

Všimneme si dvou důsledků. První spočteme dokonce kvantitativně, a dovede nás k překvapivému závěru o vlastnostech prostoru a času. Druhý důsledek souvisí s pozorováním, které obecné teorii relativity brzy po jejím vzniku přineslo popularitu a slávu.

Gravitační rudý posuv[49]

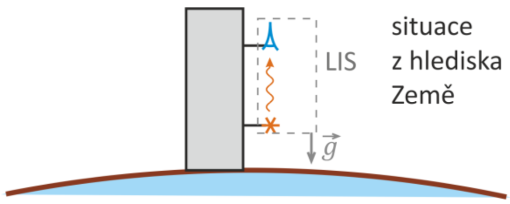
Představte si, že na Zemi posvítíte zdola nahoru, například z prvního do druhého patra nějaké budovy.[50] Zdroj Z je dole, pozorovatel P nahoře, rozdíl jejich výšek je h.



Svítit budete monochromatickým zářením. Frekvenci záření vysílaného zdrojem Z označíme ν_Z . Jakou frekvenci ν_P přijímaného záření naměří pozorovatel P?

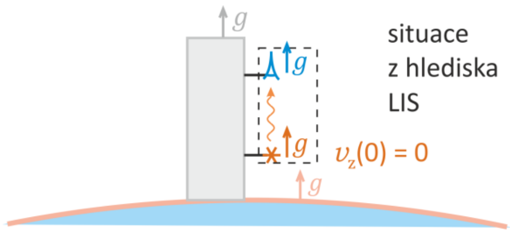
„Co je to za divnou otázku?“, můžete se zeptat. „Podle speciální teorie relativity přece frekvenční posuv nastává v důsledku Dopplerova jevu, když se pozorovatel a zdroj vzájemně pohybují. A tady jsou pozorovatel a zdroj jsou vůči sobě v klidu. Tak přece pozorovatel musí naměřit stejnou frekvenci, $\nu_P = \nu_Z$, ne?“

Podle principu ekvivalence ovšem STR platí v lokálně inerciálních systémech. Pojďme se proto na celou věc podívat z hlediska LIS – názorně řečeno, z hlediska padajícího výtahu.[51]



Z pozice Země je situace jasná. Zdroj i pozorovatel jsou v klidu, výtah (tedy LIS) padá se zrychlením g, viz obrázek. Jak tomu bude z hlediska výtahu?

Vůči padajícímu výtahu se zdroj i pozorovatel pohybují vzhůru se zrychlením o velikosti g. Předpokládejme, že výtah je v okamžiku vyslání signálu vůči Zemi v klidu[52], navíc můžeme pro názornost předpokládat, že zdroj je v úrovni podlahy výtahu.



Zdůrazněme jednu důležitou věc: Vše teď budeme popisovat z hlediska padajícího výtahu – ale zdroj a pozorovatel vůbec nemusí být ve výtahu. Jsou připevněny k budově a výtah může být „kousek vedle“.[53]

---

[49] Anglicky *gravitational red shift*. Je-li vám to milejší, můžete v češtině místo „rudý“ říkat *červený posuv*.

[50] Třeba v prázdné výtahové šachtě nebo klidně vedle budovy, to je jedno.
(Na obrázku je výrazně přehnáno zakřivení Země.)

[51] Představíme si výtah, který by na výšku zabíral právě celé patru, tedy vzdálenost mezi zdrojem a pozorovatelem.

[52] Například výtah začal padat právě v okamžiku vyslání signálu zdrojem, nebo jsme ho vyhodili svisle vzhůru a právě v daném okamžiku měl vůči Zemi nulovou rychlost. Fakticky tento předpoklad znamená, že si vybereme jeden konkrétní LIS – takový, v němž se nám situace bude jednoduše popisovat a počítat.

[53] Ba co víc, žádný výtah tam vůbec fyzicky nemusí být, můžeme si ho jen představovat. Nic nám nebrání popisovat všechny probíhající děje z daného lokálního inerciálního systému.

Pojďme se podrobněji podívat na pohyb světelného signálu a pozorovatele z hlediska LIS. V čase $t = 0$ je rychlost zdroje i pozorovatele nulová a zdroj právě vyslal světelný signál. Signál se pohybuje k pozorovateli rychlostí c.[54] Musí urazit dráhu h, takže k pozorovateli dorazí v čase $t_1 = h/c$.[55]

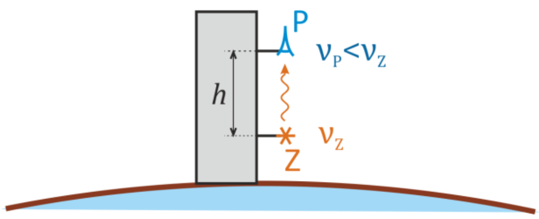
Vůči LIS se pozorovatel pohybuje se zrychlením g nahoru. V čase t_1 tedy bude mít rychlost

$$v = g \cdot t_1 = \frac{gh}{c} \,. \quad (8)$$[56]

Díky Dopplerovu jevu proto pozorovatel přijme záření o něco nižší frekvence, než byla frekvence zdroje. S využitím (8) dostáváme[57]

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{\nu_P - \nu_Z}{\nu_Z} = -\frac{v}{c} = -\frac{gh}{c^2} \,. \quad (9)$$

Tento výsledek platí nezávisle na tom, zda je přítomen nějaký padající výtah či nikoli. Prostě a jednoduše, jestliže je pozorovatel v gravitačním poli výše než zdroj, přijme záření o nižší frekvenci, než jakou vyslal zdroj.



Na Zemi je ovšem rozdíl frekvencí velmi malý. Pro pozorovatele o patro výš než zdroj, jak jsme to uvedli výše (tedy asi h = 4 m, $g \doteq$ 10 m/s^2) dá (9) relativní změnu frekvence $|\Delta\nu/\nu| \doteq 4 \cdot 10^{-16}$. Kdyby rozdíl výšek činil pět pater, byla by relativní změna frekvence $2 \cdot 10^{-15}$.

Ověřování gravitačního rudého posuvu

I takto nepatrné změny frekvence se však podařilo změřit již před více než půlstoletím. V roce 1960 Pound a Rebka a v r. 1965 Pound a Snider provedli odpovídající pokus při rozdílu výšek 22,5 m. Místo optického záření ovšem použili záření gama (vyzařované a pohlcované při energetických přechodech v atomových jádrech[58]) a pro detekci velmi malých změn frekvence využili tzv. Mössbauerova jevu[59].

---

[54] Jde o rychlost vůči (lokálnímu) inerciálnímu systému, kde podle principu ekvivalence platí STR. (Předpokládáme, že signál se pohybuje ve vakuu.)

[55] Pozorovatel se sice do času přijetí signálu nepatrně vzdálí (protože se pohybuje zrychleně směrem vzhůru), oproti vzdálenosti h však toto posunutí můžeme zanedbat.

[56] Zdroj bude mít v tomto čase stejnou rychlost, ale to už není důležité. (Proto ji ani nevyznačujeme v obrázku.) Podstatná byla jeho rychlost v čase $t = 0$ a ta byla vůči našemu LIS nulová.

[57] Rychlost pozorovatele bude velmi malá v porovnání s rychlostí světla, takže pro změnu frekvence nemusíme používat relativistický vztah.

[58] Toto záření má velmi úzké spektrální čáry.

[59] Zjednodušeně řečeno, tento efekt spočívá v tom, že u atomů v krystalu odletující foton gama záření „neodšťouchne“ jediný atom (což by vedlo k výraznému rozšíření spektrální čáry), ale předá hybnost celému krystalu. R. Mössbauer objevil tento efekt v roce 1958, již v r. 1961 byl tento objev oceněn Nobelovou cenou.

Přesnost, s jakou ověřili vztah pro gravitační rudý posuv, byla v prvním pokusu 10 %, v pokusu v roce 1965 pak 1 %.

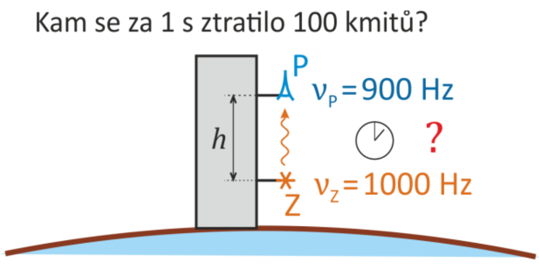
V roce 1974 pak Vessot a kol. ověřovali daný vztah porovnáním frekvence vodíkového maseru[60] na raketě ve výšce 10 tisíc km s frekvencí maseru na Zemi[61]. Vztah pro gravitační rudý posuv[62] ověřili s přesností $2{\cdot}10^{-4}$.

Gravitační rudý posuv a chod hodin

„No a co“, říkáte si teď možná. „Tak se frekvence záření o něco posune. A co má být?“[63] Ovšem ukazuje se, že tento efekt má překvapivý důsledek týkající se času, resp. chodu hodin.

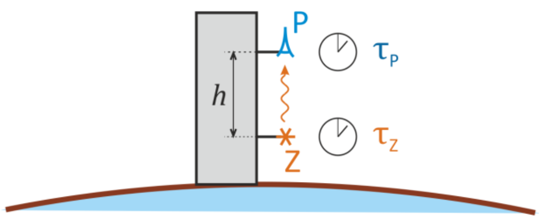
Předpokládejme pro názornost, že zdroj vysílá elektromagnetické záření nikoli na optických frekvencích, ale na frekvenci $\nu_Z = 1000\,\mathrm{Hz}$. Navíc uvažujme situaci, kdy by gravitační rudý posuv byl velký, takže pozorovatel by přijímal záření o frekvenci $\nu_P = 900\,\mathrm{Hz}$. [64]

Jednoduchá úvaha nás teď ale přivede k záhadě: Řekněme, že zdroj vysílal signál 1 sekundu. Vyslal tedy 1000 kmitů. Pozorovatel ale za stejně dlouhou dobu[65] napočítá jen 900 přijatých kmitů. Kam se proboha ztratilo 100 kmitů? Vždyť když zdroj dole vyslal 1000 kmitů, nahoru jich musí přijít také tisíc. Kmity se přece nemohou cestou ztratit! A jedna sekunda dole je stejná jako jedna sekunda nahoře – nebo ne?



Právě že není. Jediný způsob, jak danou „záhadu“ vyřešit, je opustit předpoklad, že čas ve všech místech plyne stejně rychle. Hodiny u zdroje měří (tedy ukazují) čas τ_Z, hodiny u pozorovatele čas τ_P.

Zatímco na hodinách pozorovatele uplyne čas 1 sekunda, na hodinách zdroje „za stejný čas“ uplyne jen 0,9 s. Za těchto 9 desetin sekundy zdroj samozřejmě vyšle jen 900 kmitů – tím je záhada rozřešena. Vidíme, že z existence gravitačního rudého posuvu plyne, že



hodiny, které jsou v gravitačním poli níže, jdou pomaleji.

Tento závěr je přímým důsledkem principu ekvivalence.[66]

[60] Maser je přístroj analogický laseru, negeneruje však optické, ale mikrovlnné záření.
[61] Tento pokus bývá označován jako Gravity Probe A.
[62] Šlo o obecnější vztah než výše uvedený vzorec (9), ten jsme odvodili pro případ homogenního gravitačního pole.
[63] Někdo by mohl ještě dodat „Chleba levnější nebude.“ ☺
[64] Reálně by pro optické záření byla frekvence např. $5{\cdot}10^{14}$ Hz a pro výškový rozdíl 20 m (a gravitační zrychlení na Zemi) by přijatá frekvence byla menší o 1 Hz. Princip následujícího argumentu ale bude stejný.
[65] Pozorovatel samozřejmě nezačne přijímat kmity hned, jak je zdroj vyslal. Ale cesta začátku signálu (třeba první půlvlny) od Z k P trvá stejně dlouho jako cesta konce signálu (poslední půlvlny). Čili pozorovatel přijímá signál také 1 sekundu.
[66] Protože plyne z gravitačního rudého posuvu a ten je důsledkem principu ekvivalence.

Rychlost chodu hodin můžeme porovnat i kvantitativně. Z (9) plyne pro frekvence

$$\frac{\nu_P}{\nu_Z} = 1 - \frac{gh}{c^2} \ . \tag{10}$$

A protože periody se rovnají převráceným hodnotám frekvencí, $\Delta\tau_Z = 1/\nu_Z$, $\Delta\tau_P = 1/\nu_P$, dostáváme z (10)

$$\frac{\Delta\tau_Z}{\Delta\tau_P} = 1 - \frac{gh}{c^2} \ . \tag{11}$$

Tento vztah platí nejen pro periody, ale obecně. Nejde přitom o to, že by v některých místech „šly špatně hodiny“, jde o samo plynutí času. Prostě

níže v gravitačním poli plyne čas pomaleji.

Lapidárně řečeno: Chcete-li stárnout pomaleji, slezte do sklepa. ☺ [67]

Ověřování vlivu gravitace na chod hodin

Tak dramatický závěr, k němuž jsme dospěli, si určitě žádá ověření. Opravdu už někdo prokázal, že hodiny na různých místech jsou různě rychle?

Nejen, že prokázal – dokonce se to dnes a denně využívá v systému **GPS**. Družice tohoto systému obíhají ve výšce asi 20 tisíc km nad povrchem Země rychlostí asi 3,8 km/s. Díky dilataci času podle STR se jejich hodiny každý den zpožďují o asi 7 mikrosekund oproti hodinám na Zemi. Ale díky tomu, že jsou výše v gravitačním poli, se naopak oproti hodinám na povrchu Země asi o 46 μs předbíhají. Celkově se tedy předbíhají o 39 μs za den. Toto předbíhání je v systému GPS korigováno, aby mohl správně pracovat.[68]

Skutečnost, že hodiny, které jsou výše, jdou rychleji než ty, které jsou níže, byla dokonce prokázána i v laboratoři. V roce 2010 pracovníci amerického *National Institute of Standards and Technology* (NIST) využili dvojice velmi přesných „atomových“ hodin k tomu, aby ukázali, že se jejich rychlost liší, když jsou jedny o pouhých 30 cm výše než druhé.[69] V roce 2018 oznámili[70], že přesnost novějšího typu hodin je taková, že umožní zjistit různou rychlost chodu hodin při rozdílu výšky pouhý 1 cm.

Přidejme ještě jednu zajímavost: Pomocí hodin byl v letech 2014–2018 ověřován vztah OTR pro gravitační rudý posuv s využitím dvou satelitů systému Galileo, které se po vypuštění nechtěně dostaly na excentrickou dráhu místo zamýšlené dráhy kruhové. Na satelitech jsou přesné hodiny využívající vodíkové masery; díky pohybu satelitů se dostávají na místa různě daleko od Země.

[67] Ovšem pozor, subjektivně nám to čas nepřidá. Jen budeme stárnout pomaleji oproti času těch, kdo zůstali nahoře. (Je to podobný efekt jako v STR při pohybu velkou rychlostí.) Efekt také na Zemi není nijak velký: Můžete si spočíst, že slezete-li o pět pater níže, bude čas relativně zpomalen o $2 \cdot 10^{-15}$, což za sto let udělá asi 6 mikrosekund. (S většinou lidí se asi shodneme, že to nestojí za to... ☺)

[68] Dle https://link.springer.com/article/10.12942/lrr-2014-4, s. 17 je přesnost určení času pomocí GPS 50 ns. Změna o 39 μs za den je oproti tomu skoro osmsetkrát větší. Takže bez korekcí na efekty STR a OTR by se přesnost GPS narušila už za několik minut. Můžeme tedy právem říci, že STR a OTR nejsou už jen krásnými a zajímavými teoriemi, ale také aplikovanou fyzikou.

[69] Viz zpráva https://www.nist.gov/news-events/news/2010/09/nist-pair-aluminum-atomic-clocks-reveal-einsteins-relativity-personal-scale.

[70] Viz https://www.nist.gov/news-events/news/2018/11/nist-atomic-clocks-now-keep-time-well-enough-improve-models-earth. Přesnost chodu daných hodin je řádu 10^{-18}.

Porovnáním rychlosti jejich chodu s hodinami na Zemi (s využitím dat za dobu trvající 1008 dnů) byl ověřen vztah OTR s přesností asi $2{,}5\cdot10^{-5}$. [71]

S podobnou přesností bylo porovnání rychlosti chodu hodin v různých výškách provedeno i na Zemi. V roce 2020 byl publikován výsledek měření, které srovnávalo chod přesných hodin[72] u základny a na pozorovací plošině vysílací věže Tokyo Skytree; rozdíl výšek byl 450 metrů.[73] Naměřená hodnota souhlasila s teoretickou předpovědí; rozdíl činil jen $(1{,}4 \pm 9{,}1)\cdot10^{-5}$. [74] Oproti pokusu Pounda a Rebky se tedy přesnost ověření vztahu OTR pro rudý posuv zlepšila více než tisíckrát.

A pokud se týká chodu hodin při velmi malých rozdílech výšek, pak v roce 2023 byly publikovány výsledky pokusu, v němž bylo pět souborů atomů stroncia ^{87}Sr; maximální rozdíl jejich výšek byl jen 1 cm.[75] Pokus ukazuje hranici toho, co lze dnes změřit, takže nelze očekávat vysokou přesnost; naměřený výsledek je ve shodě s předpovědí OTR na úrovni řádu deseti procent,[76] viz [77].

Chod hodin a potenciál gravitačního pole

Laicky bychom si mohli myslet, že rychlost chodu hodin určuje intenzita gravitačního pole, tedy velikost gravitačního zrychlení. Ale tak tomu není. Z (11) vidíme, že různý chod hodin určuje součin $g\cdot h$, tedy součin intenzity gravitačního pole a rozdílu výšek. To je ale rozdíl ***potenciálů*** gravitačního pole v místech pozorovatele a zdroje. To znamená, že na rychlost chodu hodin nemá přímý vliv intenzita gravitačního pole, ale jeho **potenciál**.[78] Této souvislosti se ještě dotkneme dále v souvislosti s černými dírami.

[71] Viz https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.121.231101 nebo populárnější shrnutí na https://physics.aps.org/synopsis-for/10.1103/PhysRevLett.121.231102.

[72] Šlo o hodiny využívající atomy stroncia v optické mřížce.

[73] Z teorie vychází, že relativní rozdíl frekvencí hodin je asi 5frekvencí hodin je asi $5\cdot10^{-14}$.

[74] Viz článek v Nature: https://www.nature.com/articles/s41566-020-0619-8. (Abstrakt je volně dostupný; viz též poster: https://moriond.in2p3.fr/2021/Gravitation/posters/SessionA/A17_Ohmae.pdf .)

[75] Rozdíl výšek jednotlivých souborů byl 2,5 mm, v každém souboru bylo více než 2 tisíce atomů.

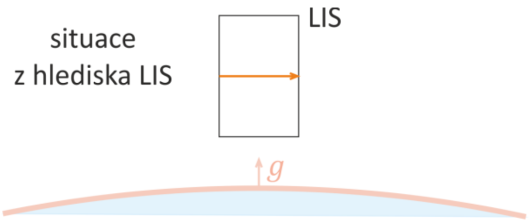
[76] Naměřená relativní změna frekvence hodin s výškou oproti teoretické hodnotě dává 1 + 0,13 ± 0,23. Konkrétně: Teorie předpovídá relativní změnu frekvence s výškou $\Delta f/f = -10{,}9\cdot10^{-19}$ na jeden centimetr, měření dalo $\Delta f/f = (-12{,}4 \pm 0{,}7 \pm 2{,}5)\cdot10^{-19}$ na cm, přitom první a druhá nejistota označená ± přestavují statistickou a systematickou chybu. Zajímavé také je opatření, které experimentátoři udělali, aby předešli případnému zkreslení při vyhodnocování výsledku daného příklonem k očekávané hodnotě, použili „slepé měření“: v každém běhu měření software ke změřeným hodnotám přidával náhodně zvolenou konstantu (až plus minus pětkrát větší hodnotu změny relativní frekvence s výškou); velikost této konstanty nebyla při zpracování dat známa a až po celkovém vyhodnocení byla od výsledku odečtena.

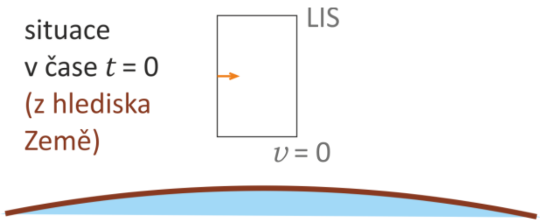
[77] Článek v časopise Nature Communications, https://www.nature.com/articles/s41467-023-40629-8, v době psaní tohoto textu volně přístupný (open access).

[78] Velmi přesné hodiny se proto plánují pro proměřování gravitačního potenciálu Země. Proměřovat gravitační pole Země hodinami, to by člověk laicky asi nečekal.

Ohyb světla v gravitačním poli

Druhý důsledek probereme stručněji. Představte si, že v padajícím výtahu posvítíme z jedné stěny na druhou, rovnoběžně s podlahou. Systém spojený s výtahem je LIS, takže se v něm světlo pohybuje rovnoměrně přímočaře. Jestliže bylo u levé stěny řekněme 1 metr nad podlahou, dopadne na pravou stěnu rovněž metr nad podlahou. Z hlediska výtahu je paprsek světla přímkou (resp. částí přímky).

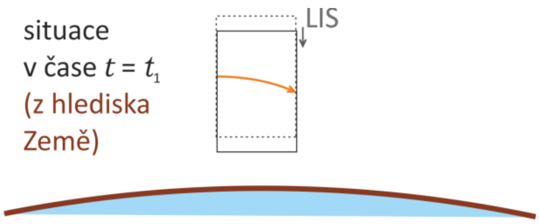




Řekněme, že jsme světlo vyslali v okamžiku, kdy je rychlost výtahu vůči Zemi nulová. Světlo je od levé stěny vysláno rovnoběžně s podlahou výtahu, a tedy i rovnoběžně s povrchem Země.

Z hlediska Země ovšem výtah padá. A s výtahem fakticky „padá“ i světlo v něm. Jak se to projeví na tvaru světelného paprsku?

Než světlo dospěje k pravé stěně, výtah získá díky gravitačnímu zrychlení rychlost směrem dolů.[79] Stejnou složku rychlosti směrem dolů má i světlo – a navíc je zřejmé, že je na pravé stěně výtahu již o něco blíže k Zemi (spolu s celým výtahem). Z hlediska Země už tedy paprsek není rovný, ale ohýbá se směrem dolů.[80]



Zdůrazněme, že pro naši úvahu není podstatné, aby zdroj světla byl ve výtahu – a ani žádný výtah zde nemusí být reálně přítomen. Prostě jsme popsali, jak by vypadal pohyb světla z hlediska lokálního inerciálního systému, a z daného rozboru nám vyšlo, že vůči Zemi musí být světelný paprsek zakřiven – a to platí, i když zde žádný výtah nebude.

„Teď to ale vypadá, že světlo prostě padá k Zemi jako cokoli jiného“, mohli byste namítnout. A není to špatná připomínka. Pokud bychom místo světlem v padajícím výtahu vystřelil rovnoběžně s podlahou z kuličkové pistole, tak kulička v beztížném stavu dopadne na pravou stěnu stejně vysoko, jako byla u levé – ale z hlediska Země padá spolu s výtahem, takže se pohybuje tak jako to známe z klasické mechaniky, tedy po parabole.

Fakticky tedy můžeme říci, že vůči Zemi se světlo lokálně pohybuje stejně, jako by se pohybovala kulička vržená vodorovně rychlostí světla. Ve skutečnosti byl ohyb světla opravdu předpovězen už v rámci newtonovské teorie.[81] Pro paprsek světla, který by procházel kolem Slunce ve vzdálenosti rovné jeho poloměru, dává newtonovská teorie odchylku asi 0,87 úhlové vteřiny.[82]

---

[79] Jednoduše řečeno, výtah už padá směrem dolů.

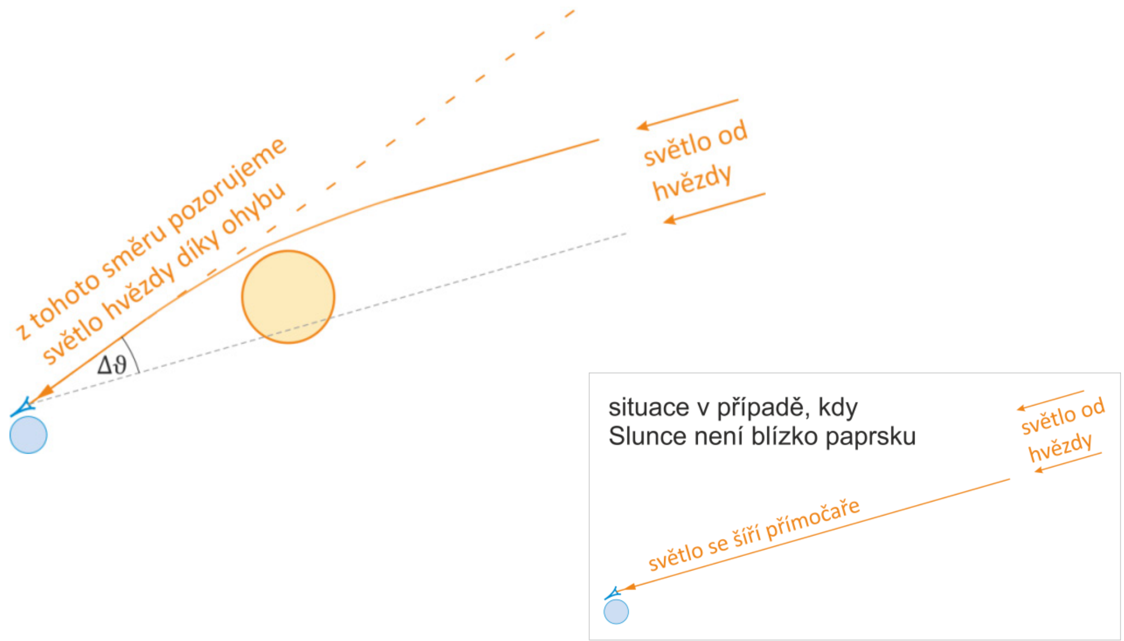
[80] Obrázek vpravo ovšem zakřivení světla značně přehání. Ve výtahu, který by byl široký 3 metry, by doba, za kterou světlo dorazí k pravé stěně, byla 10^{-8} s, a výtah (při nulové počáteční rychlosti pádu) by za tuto dobu urazil směrem dolů jen $5 \cdot 10^{-16}$ m.

[81] V roce 1784 ho předpověděl Henri Cavendish (ale svou předpověď nepublikoval) a v roce 1801 J. G. Soldner.

[82] Odchylka směru paprsku v radiánech (pro případ malých odchylek) vychází v newtonovské teorii $\Delta\vartheta \doteq 2GM/(c^2 R)$, kde M je hmotnost Slunce a R nejmenší vzdálenost paprsku od středu Slunce. (Lze to vypočítat například z výsledku řešení Keplerovy úlohy pro případ, kdy rychlost letící kuličky je velmi vysoká.) Pro Slunce je $M \doteq 2 \cdot 10^{30}$ kg, z čehož $2GM/c^2 \doteq 3$ km; R $\doteq 0{,}7 \cdot 10^6$ km, takže $\vartheta \doteq 4{,}3 \cdot 10^{-6}$ radiánů.

Vypadá to tedy, že pro ohyb světla obecnou teorii relativity vůbec nepotřebujeme. Ovšem pozor, zatím jsme popsali, jak se světlo v gravitačním poli ohýbá **lokálně**. Jak jsme ale už zdůrazňovali, lokální inerciální systémy ovšem dohromady nedávají jeden globální inerciální systém. Jak pohyb světla z jednotlivých LIS vzájemně „poskládat", je složitější, na to nevystačíme se samotným principem ekvivalence. Když se problém ohybu světla vyřeší v plné obecné teorii relativity, vyjde (v případě malých odchylek), že odchylka je **dvojnásobná**, než vychází z newtonovské teorie. V případě paprsku procházejícího těsně u povrchu Slunce je 1,75 úhlové vteřiny.[83]

Měření ohybu světla se stalo prvním důležitým testem, který proslavil obecnou teorii relativity. Měřit odchylku světelných paprsků procházejících blízko Slunce je možné jen při zatmění Slunce. V roce 1919 probíhalo zatmění Slunce, bylo ovšem viditelné jen v tropech. Expedice Artura Eddingtona měřila polohy hvězd v blízkosti Slunce ze stanovišť v brazilském Sobralu a na západoafrickém ostrovu Principe. Polohy hvězd při zatmění bylo samozřejmě nutno porovnat s polohami daných hvězd (vůči dalším hvězdám na obloze) měřenými v době, kdy je Slunce v jiné části oblohy, tedy třeba o půl roku dříve. (Viz obrázek, kde je ovšem velikost ohybu světla výrazně přehnaná.)



Výsledkem bylo zjištění, že ohyb světla je větší než předpovídá newtonovská teorie a odpovídá obecné teorii relativity. Přesnost měření ovšem nebyla velká, dosahovala jen asi 20 %.[84] Ani další pozorování při zatmění Slunce nepřinesla podstatné zlepšení přesnosti.

[83] Odchylka směru paprsku v radiánech (pro případ malých odchylek) vychází dle obecné teorie relativity $\Delta\vartheta \doteq 4GM/(c^2R)$, kde M je hmotnost tělesa a R nejmenší vzdálenost paprsku od jeho středu. Pro Slunce vychází $\Delta\,\vartheta \doteq 8{,}5\cdot10^{-6}$ rad, což je asi $4{,}86\cdot10^{-4}$ úhlového stupně, tedy 1,75 úhlové vteřiny.
(Poznámka: Znalejší čtenáři snad odpustí, že v předchozím odstavci jsme R označili za vzdálenost od středu; ve skutečnosti jde o radiální souřadnici ve Schwarzschildových souřadnicích, k těm se dostaneme v další kapitole. Například u neutronových hvězd se R od vzdálenosti od středu poněkud liší a u černých děr nelze R za vzdálenost od středu považovat už vůbec. Ale pro „běžné objekty" jako Slunce nebo planety můžeme za R vzít vzdálenost od středu a chybu tím uděláme jen zcela zanedbatelnou.)

[84] Podrobnosti k expedicím a technickým obtížím, s nimiž se měření potýkalo, lze najít v přehledném článku J. Grygara dostupném na https://vesmir.cz/cz/casopis/archiv-casopisu/1999/cislo-7/zatmeni-slunce-kvetnu-1919-relativita.html. Tam se přesnost měření udává 19 % a 6 %; C. M. Will v práci citované výše udává přesnost jen 30 %.

Výrazně přesnější jsou měření radioastronomická. V sedmdesátých letech 20. století byla pomocí měření zákrytu kvazarů 3C-273 a 3C-279 ověřena předpověď OTR s přesností 1 %.

Nejpřesnější optická měření byla provedena pomocí astrometrického satelitu Hipparcos, který umožňoval měřit polohy hvězd s přesností asi jedné *tisíciny úhlové vteřiny*.[85] Nepotřeboval čekat na zatmění Slunce, protože proměřoval polohy hvězd ze směrů, které se směrem k Slunci svíraly úhel 50 až 130 stupňů. Předpověď OTR tato měření potvrdila s přesností asi 0,3 %. [86]

Radioastronomicky se dokonce měří i ohyb světla (resp. radiového záření) způsobený gravitačním polem Jupitera; v tomto případě je maximální odchylka asi 16 tisícin úhlové vteřiny. [87]

Moderní přesná radioastronomická měření polohy mnoha set radiových zdrojů ověřují předpověď OTR s přesností dosahující 10^{-4}. [88] Oproti prvním Eddingtonovým měřením před sto lety se tedy přesnost ověření zvýšila více než tisíckrát.

Samozřejmě, na základě žádného měření nemůžeme říci „tato teorie je neprosto správná a nikdy nikdo nevytvoří teorii lepší“. Ovšem skutečnost, že OTR od svého vzniku uspěla v těchto i dalších experimentálních testech, nás přesvědčuje, že dobře vystihuje chování a vzájemný vztah gravitace, prostoru a času.

Poznamenejme, že ohyb světla se prakticky uplatňuje v tzv. efektu **gravitační čočky**. Při něm se světlo vzdálených galaxií ohýbá v gravitačním poli masivního objektu (např. jádra galaxie, celé galaxie nebo kupy galaxií) a obraz vzdálené galaxie pak vidíme zkreslený, zvětšený nebo dokonce vícenásobný.[89] [90]

[85] Viz https://www.cosmos.esa.int/web/hipparcos/mission-results . Pro názornou představu si lze vypočítat, že 1 tisícina úhlové vteřiny, je přibližně zorný úhel, pod kterým by byl vidět pingpongový míček na délku Atlantiku. Hipparcos pracoval v letech 1989 až 1993.

[86] Viz https://www.cosmos.esa.int/documents/532822/546798/poster01_03.pdf/c444cd90-acfc-463d-96ed-5675fddba96a .

[87] Viz článek v časopise The Astrophysical Journal z roku 2022: https://iopscience.iop.org/article/10.3847/1538-4357/ac3821/meta. Hodnota parametru, který je v OTR roven 1, v případě těchto měření vyšla 0,984±0,037.

[88] Viz článek C. M. Willa na https://link.springer.com/article/10.12942/lrr-2014-4, s. 44.

[89] Viz např. https://hubblesite.org/contents/articles/gravitational-lensing. Pro další vysvětlení a fotografie zadejte do vyhledávače heslo „gravitační čočkování“ resp. „gravitational lensing“.

[90] Ohyb nemusí způsobovat jen celé galaxie nebo galaktická jádra. Pro tento případ se používá název „gravitační mikročočkování“ („gravitational microlensing“).

3.4 Obecný princip relativity

V původním Newtonově pojetí mechaniky se pohyb těles popisoval vzhledem k absolutnímu prostoru – tedy vůči jedinému systému, který byl vůči všem ostatním význačný.

Je pravda, že mechanickými pokusy nebylo možno zjistit pohyb vztažných soustav vůči absolutnímu prostoru a zákony klasické mechaniky měly stejný tvar ve všech inerciálních systémech[91]. Ovšem stále bylo možno předpokládat, že „absolutní prostor“ je význačný z hlediska jiných fyzikálních zákonů.[92]

Z význačného postavení svrhla absolutní prostor až speciální teorie relativity. Vlastně učinila mnohem víc: ukázala, že nic jako absolutní prostor neexistuje, a fyziku „můžeme dělat“ v libovolném inerciálním systému. Přesněji toto vágní konstatování formuluje jeden z výchozích principů STR, *speciální princip relativity*. Říká, že fyzikální zákony musí mít stejný tvar ve všech inerciálních systémech.

STR tak zrovnoprávnila všechny inerciální systémy. Ovšem tam se ve „zrovnoprávňování“ zastavila: Inerciální systémy samy mají v STR význačné postavení oproti všem ostatním systémům[93].

Jak jsme ale viděli, za přítomnosti gravitace nemůžeme definovat globální inerciální systém. Navíc narazíme na další problém: v prostoru nebudeme moci používat euklidovskou geometrii a kartézské souřadnice, jak jsme na to byli zvyklí z STR. Nemůžeme totiž realizovat přímky. Pomocí pevných tyčí to nepůjde. Z STR víme, že neexistují absolutně tuhá tělesa, každá tyč se tedy v gravitačním poli alespoň trochu ohne.[94] Mohli bychom zkusit vytyčit síť kartézských souřadnic pomocí laserových paprsků – ale ouha, ty se v gravitačním poli také ohýbají.

Takže to, s čím se nám dobře pracovalo v STR (globální inerciální systémy a kartézské souřadnice v nich) nemůžeme používat. Obecná teorie relativity proto musí svrhnout (globální) inerciální systémy z jejich dosud význačného postavení. A nejen, že je svrhne, viděli jsme, že tyto systémy ani nemůžeme definovat, že neexistují.

Vidíme tedy, že nemáme k dispozici *žádné* význačné systémy[95]. V duchu relativistického přístupu je tedy přirozené ***zrovnoprávnit všechny systémy souřadnic***.[96] Znamená to ovšem vzdát se toho, nač jsme byli zvyklí z kartézských souřadnic: například že vzdálenost dvou bodů na ose x lze jednoduše zjistit tak, že odečteme jejich x-ové souřadnice, tedy spočteme $\Delta x = x_2 - x_1$.[97]

---

[91] Toto konstatování známe jako *klasický princip relativity*.

[92] Viz slavný Michelsonův pokus, jehož cílem bylo měřit rychlost Země vůči soustavě éteru.

[93] Například vůči systémům zrychleným nebo rotujícím.

[94] V STR v inerciálních systémech nevadilo, že tyče nejsou absolutně tuhé, protože na ně nepůsobily žádné síly. Ovšem dlouhá tyč se třeba v blízkosti Slunce určitě ohne – takže ji nemůžeme využít jako osu kartézského systému souřadnic.

[95] Ať už slovem *systémy* chápeme vztažné systémy nebo systémy souřadnic.

[96] Samozřejmě systémy v nějakém smyslu „rozumné“. Určitě nechceme mít třeba souřadnice, jejichž hodnota by při jízdě autem po silnici konstantní rychlostí divoce oscilovala či „skákala“, případně dokonce nespojitě, apod. Matematické požadavky na systémy souřadnic zde ovšem nebudeme blíže specifikovat. (Opravdu vážné zájemce by jejich zvídavost v tomto směru mohla přivést až k části matematiky zvané *analýza na varietách*, ale to už je opravdu hodně daleko od rámce tohoto textu.)

[97] Podobně vzdálenost bodů už není dána vzorcem $l^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$.

Podobný problém nastává s časem. STR vyvrátila představu jediného univerzálního času plynoucího stejně ve všech soustavách. Ovšem když jsme si vybrali jednu inerciální soustavu, běžel v ní čas všude stejně. Jak jsme ale viděli výše v části 3.3, za přítomnosti gravitace toto neplatí, čas běží na různých místech různě rychle. To znamená, že nemáme k dispozici jedinou význačnou časovou souřadnici. Takže i v případě času připustíme a zrovnoprávníme všechny časové souřadnice[98]. Stejně jako v prostoru to ovšem znamená, že časová souřadnice nám přímo neřekne, kolik času uplyne v určitém místě, resp. kolik ukážou hodiny, které jsou na daném místě v klidu.[99]

Stejně jako v STR jsou i v OTR prostor a čas provázány, mluvíme proto o **prostoročase**[100]. Prostorové a časové souřadnice jsou tedy souřadnice v prostoročase. Z předchozí diskuse vidíme, že v relativistické teorii gravitace budeme muset připustit libovolné soustavy souřadnic v prostoročase – a všechny tyto soustavy budou rovnoprávné.

A co znamená, že jsou rovnoprávné? Že žádnou z nich nemůže zvýhodňovat nějaký fyzikální proces resp. zákon. Tento závěr, známý jako **obecný princip relativity**, patřil k východiskům, která Einsteina vedla při vytvoření OTR. Trochu přesněji jej můžeme vyslovit například ve tvaru:

Fyzikální zákony lze formulovat tak, že mají ve všech soustavách souřadnic stejný tvar.[101]

Pod různými soustavami souřadnic si ovšem nesmíme představovat jen „běžné“ soustavy souřadnic jako sférické, válcové a podobné. Souřadnice se mohou měnit i s časem. Někdy se dokonce pro názornou představu používá termín „souřadnicový měkkýš“. Představte si třeba, že by souřadnice byly nakresleny na chobotnici volně plující oceánem… A navíc by na sobě chobotnice měla soustavu hodin, na nichž bychom v daných místech odečítali čas. I v takovýchto soustavách souřadnic musíme umět „dělat fyziku“, tj. popisovat fyzikální děje.[102] Obecná teorie relativity to zvládne, a opravdu umí fyzikální zákony (například pro pohyb částic, chování elektromagnetického pole apod.) formulovat tak, že mají ve všech soustavách stejný tvar.

Připadá vám to náročné? Ono je to ve skutečnosti ještě zajímavější!

[98] Opět míněno: všechny „rozumné“, podobně jako v případě prostorových souřadnic.

[99] V případě, kdy bychom pro jednoduchost měli naši Zemi v prázdném vesmíru, bychom třeba mohli v celém prostoru zavést časovou souřadnici, kterou by určovaly hodiny někde daleko od Země, teoreticky v nekonečnu. Jak jsme ale viděli výše v části věnované rudému posuvu, hodiny na povrchu Země by vůči této časové souřadnici šly pomaleji, takže by se neustále více a více zpožďovaly.

[100] Pozn. autora: Osobně se mi hodně nelíbí, když někdo užívá slovo „časoprostor“. Pokud je to někde ve sci-fi, tak to ještě moc nevadí, tam se to užívalo i dříve, zejména u autorů nebo překladatelů, kterým fyzika zas tak moc neříkala. Ale ve fyzikální a seriózní popularizační literatuře se vždy používal termín *prostoročas*. Ostatně, v angličtině je to *spacetime* (někdy ve tvaru *space-time*); název „timespace“ se ve fyzice opravdu nepoužívá. (Ve sci-fi zjevně také ne, byť Google jeden film s tímto názvem dohledá, ale podle divácké recenze, kterou u toho zobrazí, zřejmě nestojí za zhlédnutí.) Konec poznámky autora. ☺

[101] Přesnější formulace a význam tohoto principu jsou v různých knihách předmětem někdy i dosti detailních diskusí, viz třeba učebnici K. Kuchaře *Základy obecné teorie relativity*, Academia, Praha, 1968.

[102] Soustavu souřadnic spojenou s chobotnicí asi nikdo k popisu fyzikálních dějů používat nebude, ale třeba soustava souřadnic spojených s částicemi padajícími do vznikající černé díry, ta se k popisu dějů při gravitačním kolapsu docela hodí.

Příklad s chobotnicí je totiž poněkud zavádějící. V moři, v němž chobotnice plave, bychom reálně mohli vytvořit kartézskou síť souřadnic. Prostor v moři stále má svou euklidovskou geometrii; chobotnice k němu jen přidává svoje vlnící se souřadnice.

Ve skutečném prostoročase ale za přítomnosti gravitace žádnou pevnou geometrii nemáme. Sama geometrie je dynamická – takže třeba když se kolem nás šíří gravitační vlna, znamená to, že se vlní samotný prostoročas.

Bez potřebné matematiky je to do detailu těžko pochopitelné.[103] Úvodní a populární výklady často používají názorné analogie a modely využívající třeba zakřivené plochy nebo napnutou pružnou látku, která se může prohýbat a vlnit. Takové modely bývají k vidění v science centrech. Určitou představu dávají, což je třeba ocenit. Musíme si ale být vědomi, že to jsou opravdu jen analogie, které mohou vystihnout jen některé aspekty skutečného chování prostoročasu.

Přesnějšímu výkladu OTR se zde věnovat nebudeme, pro ten bychom opravdu museli přidat dost matematiky.[104] Ovšem pojmy jako „zakřivený prostoročas“ nebo „černé díry“ jsou atraktivní, a tak stojí za to, podívat se na ně alespoň trochu. Ale tyhle lahůdky si necháme až do další kapitoly.

[103] Abychom si nic nenalhávali: Opravdu do detailů to bez příslušné matematiky pochopit nejde, tečka. Tohle konstatování nemá být podceněním čtenářovy inteligence, jen prostě ta inteligence potřebuje podporu příslušné matematiky. Máte-li zájem, tak se do studia obecné teorie relativity a pro ni potřebné Riemannovy geometrie pusťte, je to nádherná disciplína! Ale určitě ji tady nemůžeme vyložit na pár stránkách. (Můžeme s tím nesouhlasit, můžeme proti tomu protestovat, ale to je tak všechno, co s tím můžeme dělat. ☺)

[104] A mohli bychom se tomu věnovat celý semestr i déle. Vážnější zájemce proto odkážeme na specializované přednášky věnované obecné teorii relativity a relativistické fyzice a astrofyzice.