Vodič v elektrostatickém poli

V této kapitole se budeme věnovat chování vodičů v elektrostatickém poli a tomu, jak vodiče ovlivňují pole ve svém okolí.

Na úvod jen stručně připomeneme rozdíl mezi izolanty a vodiči. Například když třením zelektrujeme kus plastové tyče, můžeme se přesvědčit, že náboj zůstává na tom „kousku“, nešíří se na další části tyče. Můžeme říci, že jednotlivé kousky tyče jsou vzájemně izolovány – materiály, které se takto chovají, nazýváme **izolanty**.[1] [2]

Naopak když nabijeme například kovovou plechovku, nezůstane náboj jen v místě, které jsme nabili, ale rozšíří se na celou plechovku. Můžeme říci, že materiál umožňuje náboj vést do celé plechovky; takovéto materiály tedy nazýváme **vodiče**.

V kovových vodičích jsou náboji, které se mohou přemisťovat, elektrony; v kapalinách to jsou ionty, v plynech (a v plazmatu) ionty ev. také elektrony. My se zatím budeme rozložení a pohybu náboje věnovat z makroskopického resp. fenomenologického hlediska, takže budeme mluvit o pohybu jak záporného, tak kladného náboje, i když víme, že reálně se v kovech přemisťují jen elektrony.[3]

Co nás v souvislosti s vodiči v elektrostatickém poli bude zajímat? Například následující otázky:

- Jak se náboj rozloží ve vodiči ev. na jeho povrchu?
- Jak je to s potenciálem na vodiči a ve vodiči?
- Jaká je elektrická intenzita ve vodiči? A co v dutině ve vodiči?
- Jak vodič ovlivňuje elektrostatické pole ve své blízkosti?
- Jak „uskladnit“ na vodiči co nejvíc náboje?
- Mají nabité vodiče nějakou energii? Jak velkou?

S tím, co už známe o náboji, potenciálu a intenzitě, dokážeme tyhle otázky postupně zvládnout.

3.1 Náboj a potenciál na vodiči a v něm

… (už bylo na přednášce, časem bude dopsáno i do tohoto textu…

3.2 Pole vně vodiče a jak ho určit

… (už bylo na přednášce, časem bude dopsáno i do tohoto textu…

3.3 Náboj v blízkosti vodiče, metoda obrazů

… (už bylo na přednášce, časem bude dopsáno i do tohoto textu…

3.4 Kapacita vodiče, kondenzátor

… (už bylo na přednášce, časem bude dopsáno i do tohoto textu…

---

[1] Samozřejmě už jsme je poznali. Když jsme například nabíjeli sami sebe z van de Graafova generátoru, stáli jsme na izolační podložce, abychom se nevybili „do země“. Podobně když chceme nabít kovovou plechovku (viz další text), dáváme ji také na izolační podložku; koule van de Graafova generátoru je také držena podpěrami z izolantů. Zkuste vymyslet další podobné příklady.

[2] Ve skutečnosti žádný izolant není úplně ideální (s výjimkou vakua – ale jak byste chtěli stát na izolační podložce z vakua? ☺). Vodivosti různých materiálů se budeme věnovat v kapitole o elektrickém proudu.

[3] Když třeba plechovku nabijeme kladným nábojem ze zelektrované skleněné tyče, řekneme, že kladný náboj se rozmístil po celé plechovce (říci, že se „rozlezl“ je už hodně hovorové a slangové, ale docela názorné) – i když reálně se elektrony i ze vzdálenějších částí plechovky přesunuly k té skleněné tyči a na ni.

3.5 Energie nabitých vodičů

Nabitá plechovka nebo koule van de Graaffova generátoru má určitě nějakou energii.[4] Jak je tato energie velká?

Energie náboje q ve vnějším elektrostatickém poli v místě, kde potenciál je φ, je $W = q \cdot \varphi$. Znamená to, že když má koule van de Graafova generátoru náboj Q a potenciál φ, je její energie prostě $W = Q \cdot \varphi$? Tak jednoduché to není. Teď totiž φ není potenciál vnějšího pole[5], ale potenciál pole, které budí samotný náboj Q. Takže energii budeme muset vypočítat poněkud „opatrněji“.

Uvažujme vodivou kouli o poloměru R nabitou nábojem Q. Její potenciál je $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$.[6] Z velké dálky (teoreticky z nekonečna) teď budeme k nabité kouli přibližovat malý náboj q. Předpokládáme přitom, že oba náboje mají stejná znaménka, takže se odpuzují. Náboj q tedy musíme k nabité kouli strkat silou, čili konat na něj práci a dodávat tak celému systému energii. Práce ΔW, kterou dodáme, když náboj „dostrkáme“ až na vodivou kouli, je rovna potenciální energii, kterou má náboj q na povrchu koule, tedy $\Delta W = q \cdot \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \cdot q$.[7] O tuto práci se zvýší energie nabité koule. Její náboj se přitom zvýší o $\Delta Q = q$. Pro přírůstek energie nabité koule tedy platí

$$\Delta W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \cdot \Delta Q \ . \tag{3.1}$$

Celkovou energii nabité koule dostaneme „posčítáním“ (tedy integrací) všech přírůstků energie od stavu, kdy koule nebyla nabitá, až do jejího konečného náboje Q:

$$W = \int_0^Q \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tilde{Q}}{R} \cdot \Delta\tilde{Q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^Q \tilde{Q} \cdot \Delta\tilde{Q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{1}{2}\tilde{Q}^2\right]_0^Q = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \ .^{8} \tag{3.2}$$

Tento vztah můžeme ještě přepsat, když si uvědomíme, že kapacita vodivé koule je $C = 4\pi\varepsilon_0 R$.
Z (3.2) dostáváme

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \tag{3.3}$$

Dá se odvodit, že tento vztah platí obecněji, kdy vodič nemá tvar koule. Ukážeme si analogické odvození pro případ nabitého kondenzátoru.

---

[4] Jak byste o tom někoho přesvědčili? Rozmyslete si to sami, než si přečtete následující text.
(Například: Když plechovku vybijeme, přeskočí jiskra, slyšíme „prásknutí“. Když vybíjíme přes doutnavku nebo zářivku, vidíme, že krátce zableskne.)

[5] Tedy pole, které by vytvářely nějaké jiné náboje, třeba několik nabitých tyčí v blízkosti naší nabité koule.

[6] Pokud nevíte proč, připomeňte si vztah pro potenciál pole bodového náboje a to, že pole vně nabité vodivé koule je stejné jako pole bodového náboje (a proč tomu tak je).

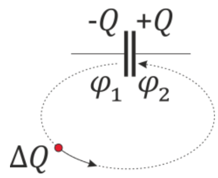
[7] Práci a energii zde značíme stejným symbolem W. (Značit energii jako E není vhodné, když tímto písmenem značíme elektrickou intenzitu.) Energie náboje q v nekonečnu je nulová.

[8] Při integraci označujeme jako Q náboj koule po nabití; ten v integrálu vystupuje jako horní mez. Integrační proměnou (tedy náboj, který v průběhu nabíjení roste od 0 do Q) proto musíme označit jiným symbolem; zde ho značíme $\tilde{Q}$.

Energie nabitého kondenzátoru

Uvažujme kondenzátor o kapacitě C, který je již nabit nábojem Q.[9] Napětí na kondenzátoru je U; Potenciály na jeho elektrodách označíme φ_1 a φ_2, napětí mezi elektrodami kondenzátoru je tedy $U = \varphi_2 - \varphi_1$.

Přemístíme malý náboj ΔQ z elektrody s potenciálem φ_1 na elektrodu s potenciálem φ_2, viz obrázek. Energie náboje ΔQ se tím změní z $\Delta Q \cdot \varphi_1$ na $\Delta Q \cdot \varphi_2$, tj. změní se o



$$\Delta W = \Delta Q \cdot \left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = \Delta Q \cdot U = \frac{Q}{C}\Delta Q \;.^{10} \qquad (3.4)$$

Teď uvažujme situaci, kdy byl na začátku kondenzátor úplně vybitý, to znamená, že napětí na něm bylo nulové. (Náboje na elektrodách byly také nulové, protože $Q = C \cdot U$.) Energii takového kondenzátoru je přirozené brát jako nulovou.[11]

Nyní kondenzátor nabijeme, takže na něm bude náboj Q.[12] Energii, kterou nabitím získal, dostaneme „posčítáním“ příspěvků (3.4), tedy integrací

$$W = \int_0^Q \frac{\tilde{Q}}{C} d\tilde{Q} = \frac{1}{C}\int_0^Q \tilde{Q} d\tilde{Q} = \frac{1}{C}\left[\frac{1}{2}\tilde{Q}^2\right]_0^Q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \;.^{13} \qquad (3.5)$$

Protože mezi napětím a nábojem na kondenzátoru platí vztah $Q = C \cdot U$, plynou z výsledku (3.5) tři vyjádření pro energii kondenzátoru:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} C \cdot U^2 \;.} \qquad (3.6)$$

Že nabitý kondenzátor opravdu má energii, se můžeme přesvědčit třeba tak, že k němu připojíme svítivou diodu[14] [15].

[9] Tedy na jedné jeho elektrodě je náboj $+Q$, na druhé náboj $-Q$. Při výpočtu můžeme uvažovat $Q>0$, ale není to podstatné.

[10] Zde jsme využili vztah mezi napětím a nábojem na kondenzátoru, $U = Q/C$.

[11] Z vybitého kondenzátoru žádnou energii nezískáme. (Míněno samozřejmě elektrickou energii. Procesy, kdy bychom například kondenzátor užili jako závaží, tady neuvažujeme. ☺)

[12] Tedy na jedné elektrodě $+Q$ a na druhé $-Q$.

[13] Symbol $\tilde{Q}$ zde podobně jako v (3.2) značí náboj postupně rostoucí v průběhu nabíjení.

[14] LED, čili slangově „LEDku“. Pozor, s LEDkou je třeba mít v sérii rezistor, který omezí proud. (Pro pokus je vhodný kondenzátor o kapacitě několika tisíc μF; je-li nabit na 9 V, je vhodný odpor rezistoru v sérii 390 Ω.)

[15] LEDkou s kondenzátorem nabitým na malé napětí velký světelný záblesk neuděláme, jde jen o demonstrační a trochu „hračkový“ pokus. Ovšem stejný princip se užívá i u fotoblesku. Tam jsou kondenzátory nabité na vyšší napětí (např. 200 V) a energie, kterou dodají výbojce, umožní záblesk, který už stojí za to.

Poznámka ke školním pokusům s indukční (Wimshurstovou) elektrikou a k bezpečnosti podobných pokusů

Leydenské lahve v indukční elektrice jsou také kondenzátory. V malé školní indukční elektrice mívají kapacitu 100 až 200 pF (záleží na jejich velikosti)[16]. Jsou typicky zapojeny v sérii, takže jejich celková kapacita je poloviční.[17] Indukční elektrika dokáže mezi elektrodami vytvořit jiskru na vzdálenost i přes 3 cm, což při uváděné hodnotě elektrické intenzity pro přeskok jiskry znamená napětí až 100 kV.[18]

Pro C = 100 pF = 10^{-10} F a U = 10^5 V dostáváme z (3.6) energii W = 0,5 J. To se sice nezdá mnoho, ale třeba publikace [19] uvádí, že výboj o energii větší než 0,25 J dá silný šok („heavy shock“) a výboj o energii 10 J je nebezpečný. Jako energie výboje, který dá nepříjemnou ránu, se zmiňuje už 10 mJ.

Takže výboj ze školní indukční elektriky podle těchto údajů není život ohrožující[20], ovšem rozhodně nesahejte na kontakty nabitých leydenských lahví indukční elektriky oběma rukama! Šok by byl opravdu velmi citelný a úraz by mohl nastat v důsledku úleku, prudkého pohybu a následného pádu apod. Takže při pokusech z elektrostatiky **pozor na bezpečnost**! A rozhodně nenechávejte pokusy, při nichž jde o podobně silné výboje, provádět žáky, kteří by měli srdeční potíže nebo kardiostimulátor!

A jak je to se školním van de Graafovým generátorem?

Kapacitu jeho sféry můžeme odhadnout na lehce přes 10 pF[21]. I pokud by tedy potenciál sféry dosáhl 100 kV (reálně bude spíše menší), bude energie asi o řád menší, než u výše diskutované indukční elektriky, tedy zhruba 0,05 J.

---

[16] Jejich kapacitu si můžete změřit měřičem kapacity, nezapomeňte ale předem leydenské láhve vybít, jinak si měřič zničíte.

[17] U staršího typu, který máme na katedře, je kapacita asi 80 pF.

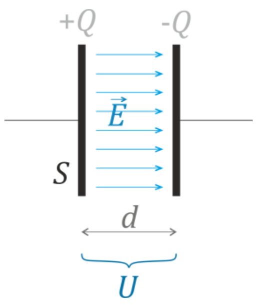
[18] Takové hodnoty dosahují hlavně starší, již téměř „muzeální“ exempláře indukčních elektrik. (U nového typu nejmenovaného výrobce, který také máme na katedře, je problém získat jiskru v délce přes 1 cm.)

[19] Morse, R.A. et al.: *Teaching about Electrostatics*. AAPT, 1992.

[20] To by bylo hodně divné, kdyby školní pomůcka měla smrtící potenciál…

[21] Odhad z rozměrů. Poloměr sféry je 10 cm, což dává kapacitu asi 11 pF. Měřič kapacity ukázal asi 13 až 14 pF, což vypadá rozumně, konec konců nejde o jedinou sféru v nekonečném prázdném prostoru. Takže reálně se na situaci můžeme dívat tak, že sféra je spíše jednou elektrodou kondenzátoru, jejíž druhou elektrodou jsou okolní předměty spojené se zemí.

3.6 „Šílená myšlenka“: energii má samo pole



Mějme deskový kondenzátor o ploše desek S a vzdálenosti desek d, nabitý na napětí U, viz obrázek. Energie tohoto nabitého kondenzátoru je

$$W = \frac{1}{2} C \cdot U^2 \tag{3.7}$$

Pole mezi deskami bereme jako homogenní, E = konst. Napětí mezi deskami je tedy $U = E \cdot d$. Kapacita deskového kondenzátoru je $C = \varepsilon_0 S / d$. Po dosazení do (3.7) dostáváme

$$W = \frac{1}{2} C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{S}{d} \cdot (E \cdot d)^2 = \frac{1}{2} \underbrace{S \cdot d}_{V} \cdot \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \cdot V \,, \tag{3.8}$$

kde $V = S \cdot d$ je objem vnitřku kondenzátoru, tedy objem, kde je nenulová intenzita elektrického pole.[22] Vidíme, že při dané intenzitě E je energie nabitého kondenzátoru úměrná objemu V.

To nás přivádí na další **„šílenou myšlenku“**. Můžeme si představit, že:

> **Energii má samo elektrické pole**
>
> a tato energie je rozložena v prostoru s objemovou hustotou $w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$. (3.9)

To je velký rozdíl oproti představě, kterou jsme měli doposud. Zatím jsme uvažovali, že energii mají náboje (v poli ostatních nábojů). Nyní přecházíme k představě, že energii má samo pole. V elektrostatice nám může připadat, že jde jen o ekvivalentní (a pro někoho asi zpočátku podivný) způsob, jak energii počítat. Ale celkově se v elektromagnetismu ukázalo, že je to myšlenka velmi nosná a podnětná.

Že elektromagnetické pole má energii a že ji může přenášet, se ostatně přesvědčujeme denně. Stačí nastavit tvář slunečním paprsků a cítíme, jak nás elektromagnetické záření zahřívá.[23] Nebo jim nastavit fotovoltaický panel a výslednou elektrickou energií nabíjet třeba baterii v mobilu – příkladů sami najdete spoustu.

Uveďme ještě jeden tvar pro objemovou hustotu energie. Použijeme-li dříve zavedenou veličinu $\vec{D}$ (elektrická indukce) a vztah, který platí ve vakuu: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, můžeme (3.9) zapsat jako:

$$\boxed{w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}} \tag{3.10}$$

Tento vztah platí i v obecnějším případě pro nehomogenní pole. Celkovou energii pole pak určíme integrací přes objem:

$$W = \int_V w \, dV \tag{3.11}$$

---

[22] Efekty na okrajích desek kondenzátoru zde zanedbáváme. (To je rozumné když vzdálenost desek je výrazně menší než jejich rozměry, toto zanedbání jsme provedli už při odvozování kapacity deskového kondenzátoru.)

[23] Když nesvítí slunce, nastavte tvář nebo dlaně paprskům z teplometu nebo rozehřátých kamen…

Příklad: Energie pole nabité vodivé koule

Elektrická intenzita pole buzeného nabitou vodivou koulí je $E_r = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$,[24] kde Q je náboj koule a r vzdálenost od středu koule. Elektrická indukce je $D_r = \varepsilon_0 E_r = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{Q}{r^2}$.[25] Hustota energie elektrického pole je tedy

$$w = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} = \frac{1}{2}E_r \cdot D_r = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^4} \ . \qquad (3.12)$$

Pro kouli o poloměru R je elektrické pole nenulové v celém prostoru pro $r > R$. Celkovou energii tedy získáme objemovou integrací[26]

$$W = \int_V w\,dV = \int_R^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^4}\cdot r^2 \sin\vartheta \; dr\,d\vartheta\,d\varphi =$$

$$= \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\cdot 4\pi \cdot \int_R^\infty \frac{1}{r^2}\,dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \ .$$

Vyšla nám tedy stejně velká energie jako v (3.2), kde jsme ji počítali jako energii nábojů.

[24] E_r je radiální složka intenzity, jde o intenzitu vně koule.

[25] Opět jde o její radiální složku; elektrická intenzita a elektrická indukce mají stejný směr.

[26] Nechcete-li počítat celý objemový integrál, můžete nejprve uvážit, že v tenké kulové slupce (r, r+Δr) je energie pole $\Delta W = \dfrac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\dfrac{Q^2}{r^4}\cdot 4\pi r^2 \cdot \Delta r = \dfrac{1}{8\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q^2}{r^2}\cdot \Delta r$. (Hustotu energie bereme ve slupce konstantní, protože $\Delta r \ll r$. Energii ve slupce proto počítáme jednoduše jako součin hustoty energie (3.12) a objemu slupky $\Delta V = 4\pi r^2 \cdot \Delta r$.) Celkovou energii získáme „sečtením přes všechny slupky“, tedy integrálem

$$W = \int_R^\infty \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}\cdot dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \ .$$

Shrnutí

Energie nabitých těles:

Vodivá koule: $W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$ Kondenzátor: $W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Q \cdot U = \frac{1}{2}C \cdot U^2$

Energie elektrického pole:

Hustota energie: $w = \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D}$, Celková energie: $W = \int_V w\,dV$