Dipóly a dielektrika

Proč se zabývat elektrickým polem dipólu a tím, jak na dipól působí vnější elektrické pole? Pomůže nám to pochopit, jak i nevodiče (aniž bychom je zelektrovali třením) ovlivňují elektrické pole.

Mnohé molekuly se totiž díky rozložení kladných a záporných nábojů chovají jako malé elektrické dipóly.[1] Jsou-li v látce natočeny různými směry, jejich elektrické pole se zřejmě na makroskopické úrovni vyruší.[2] Když však látku umístíme do elektrického pole, dipóly se mohou natáčet[3] ve směru intenzity a látka tak získá celkový dipólový moment. Říkáme, že se vlivem vnějšího pole **polarizuje**. Díky tomu zpětně ovlivňuje elektrické pole. Látky, které se takto chovají, nazýváme **dielektrika**.[4]

V následujícím textu se ovšem nebudeme zabývat mikroskopickým vysvětlením polarizovatelnosti a s ní souvisejících jevů[5] a budeme vše popisovat spíše fenomenologicky. I tento přístup nám poskytne spoustu užitečných pohledů a odpovědí.

Co nás v souvislosti s dipóly a dielektriky bude zajímat? Například následující otázky:

- Jaká síla působí na dipól v elektrostatickém poli?
  (Jak je to v homogenním poli? A jak v nehomogenním?)
- Jakým momentem síly působí elektrostatické pole na dipól?
- Jaká je energie dipólu v elektrostatickém poli? [6]
- Jaké elektrostatické pole kolem sebe budí elementární dipól? [7]
- Co když máme v látce (v dielektriku) spoustu malých dipólů, třeba natočených jedním směrem? Jaké elektrické pole budou budit?
- K čemu je to všechno dobré? Pomůže nám to nějak pochopit chování dielektrik v elektrickém poli? [8]

Začneme postupně, opravdu od jednoho dipólu ve vnějším poli.

---

[1] Molekulám, které mají dipólový moment „samy od sebe“, se říká *polární molekuly*.

[2] Až na výjimky, např. tzv. *elektrety*.

[3] Navíc i v *nepolárních molekulách* se mohou vlivem vnějšího pole náboje posunout a molekula si tak dipólový moment vytvoří.

[4] Někdy se termín *dielektrikum* používá jako synonymum pro izolant. (Ovšem u izolantů jde o to, že nevedou elektrický proud, u dielektrik je podstatná jejich polarizovatelnost. Ale do těchto detailů zde nebudeme zabíhat.)

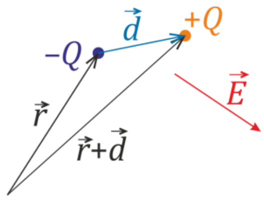
[5] Na hlubší úrovni by to ostatně vyžadovalo kvantovou fyziku.

[6] Taky by asi z energie mělo být možné spočítat sílu a moment působící na dipól. Dokážeme to?

[7] To znamená určit třeba potenciál a/nebo intenzitu tohoto pole.

[8] Pochopíme například, proč zelektrovaný jantar přitahuje malé papírky nebo proč zelektrované plastové brčko drží na nevodivé stěně? Ale půjde i o praktičtější věci, třeba jak dielektrikum pomáhá, někdy i výrazně, zvýšit kapacitu kondenzátorů. Nebo cože je to ten elektret v jednom druhu mikrofonů.

4.1 Dipól ve vnějším poli



Dipól se skládá ze dvou nábojů $-Q$ a $+Q$, vektor spojující oba náboje budeme označovat $\vec{d}$, viz obrázek. Jeho dipólový moment je

$$\vec{p} = Q\vec{d} \tag{4.1}$$

Dipól je v elektrickém poli o intenzitě $\vec{E}$; pole může, ale nemusí být homogenní. Silové působení pole na dipól si nejprve vždy odvodíme co nejjednodušeji, pro dipól konečných rozměrů, pak přejdeme k vyjádření pro elementární dipól.[9]

Síla působící na dipól

Na náboj $+Q$ v dipólu působí síla $\vec{F}_+ = Q\vec{E}(\vec{r}+\vec{d})$, na náboj $-Q$ síla $\vec{F}_- = -Q\vec{E}(\vec{r})$. Okamžitě vidíme, že je-li pole homogenní[10], je $\vec{F}_+ + \vec{F}_- = 0$, takže **síla na dipól v homogenním poli je nulová**.

V obecném případě (tedy v nehomogenním poli) je síla

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = Q\vec{E}(\vec{r}+\vec{d}) - Q\vec{E}(\vec{r}) = Q\left(\vec{E}(\vec{r}+\vec{d}) - \vec{E}(\vec{r})\right) \tag{4.2}$$

Je-li $|\vec{d}\,|$ malé, můžeme rozdíl intenzit přibližně vyjádřit jako[11]

$$\vec{E}(\vec{r}+\vec{d}) - \vec{E}(\vec{r}) \doteq \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\vec{E}}{\partial x_i}\cdot d_i \tag{4.3}$$

Po dosazení do (4.2) a dalších úpravách dostaneme

$$\vec{F} \doteq Q\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\vec{E}}{\partial x_i}\cdot d_i = \sum_{i=1}^{3} Q\,d_i\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} p_i\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial x_i}\ . \tag{4.4}$$

Pro elementární dipól dává (4.4) přesnou hodnotu síly.[12] Tento výsledek se také někdy zapisuje ve tvaru

$$\boxed{\vec{F} = (\vec{p}\cdot\mathrm{grad})\vec{E}\ \text{, resp. } \vec{F} = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}\ .^{13}} \tag{4.5}$$

---

[9] Připomeňme, že od konečného k elementárnímu dipólu přecházíme limitováním $\vec{d}\to 0$, $Q\to\infty$ tak, že $\vec{p} = Q\vec{d} = \text{konst.}$

[10] $\vec{E} = \text{konst.} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}+\vec{d}) = \vec{E}(\vec{r})$

[11] Jde o rozdíl funkce ve dvou blízkých bodech; tento obrat dobře známe v případě funkce jedné proměnné: $f(x+\Delta x) - f(x) \doteq \frac{df}{dx}\cdot\Delta x$, zde ho aplikujeme na vektorovou funkci tří proměnných x_1, x_2, x_3.

[12] Trochu nepřesně bychom mohli říci, že (4.3) dá přesnou hodnotu rozdílu intenzit v „nekonečně blízkých bodech“. (Čtenářům, jejichž toto připadá příliš vulgarizující, se omlouvám a prosím je, aby si skutečnost, že (4.4) dá v limitě přesný výsledek, dokázali sami například pomocí Taylorova rozvoje funkce více proměnných.)

[13] Připomeňme, že $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$, takže $\vec{p}\cdot\nabla = \vec{p}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) = p_1\frac{\partial}{\partial x_1} + p_2\frac{\partial}{\partial x_2} + p_3\frac{\partial}{\partial x_3}$. Tento operátor aplikujeme na intenzitu $\vec{E}$ po složkách, takže $F_1 = p_1\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + p_2\frac{\partial E_1}{\partial x_2} + p_3\frac{\partial E_1}{\partial x_3}$ a analogicky pro F_2 a F_3.

Zajímavý důsledek plyne z (4.4) v případě, že dipólový moment $\vec{p}$ má stejný směr jako intenzita $\vec{E}$. Ukažme ho pro jednoduchost v případě, že intenzita má směr osy x_1, tedy, že $\vec{E} = (E, 0, 0)$ a $E > 0$. Tím pádem $\vec{p} = (p, 0, 0)$ a $p > 0$. Síla má také nenulovou jen složku do směru x_1 a (4.4) dává

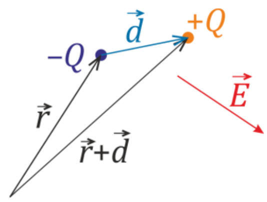
$$F_1 = p \cdot \frac{\partial E}{\partial x_1} \tag{4.6}$$

Je-li $\frac{\partial E}{\partial x_1} > 0$, je $F_1 > 0$, tedy míří do míst, kde je intenzita větší. Podobně je tomu pro $\frac{\partial E}{\partial x_1} < 0$, síla v tomto případě míří proti směru osy x_1, tedy opět do míst, kde je intenzita vyšší. Platí tedy, že

Dipól (natočený ve směru elektrické intenzity)
je vtahován do míst, kde je pole silnější.

Uměli byste tohle dokázat i bez matematiky, kterou jsme použili výše? Jde to i pro dipól, který není elementární. Schválně to zkuste vymyslet, než se podíváte na nápovědu[14].

Moment síly působící na dipól



Kromě síly může elektrické pole na dipól působit momentem síly, ten se dipól snaží natáčet. Podívejme se nejprve, jak je tomu **v homogenním poli** $\vec{E} = \text{konst.}$ Moment síly je

$$\vec{M} = (\vec{r} + \vec{d}) \times \vec{F}_+ + \vec{r} \times \vec{F}_- = (\vec{r} + \vec{d}) \times Q\vec{E} + \vec{r} \times (-Q)\vec{E} = Q\vec{d} \times \vec{E}$$

Protože $Q\vec{d} = \vec{p}$, je moment síly, kterou homogenní pole působí na dipól[15]

$$\boxed{\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}\ .} \tag{4.7}$$

Kdy je moment působící na dipól nulový? Zjevně v případě, když vektory $\vec{p}$ a $\vec{E}$ jsou rovnoběžné. **Elektrické pole se snaží stočit dipól tak, aby mířil ve směru elektrické intenzity**.[16]

Jak je tomu s momentem síly působícím na dipól obecně, **v nehomogenním poli**? Opět ho spočteme ze sil:

$$\vec{M} = (\vec{r} + \vec{d}) \times Q\vec{E}(\vec{r} + \vec{d}) + \vec{r} \times (-Q)\vec{E}(\vec{r}) = Q\vec{d} \times \vec{E}(\vec{r} + \vec{d}) + \vec{r} \times \underbrace{Q\left(\vec{E}(\vec{r} + \vec{d}) - \vec{E}(\vec{r})\right)}_{\vec{F}\ \text{(viz (4.2))}}$$

Zapíšeme-li tento výsledek pomocí dipólového momentu $\vec{p}$, dostáváme

$$\boxed{\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} + \vec{r} \times \vec{F}\ ,} \tag{4.8}$$

tedy vlastně výsledek velmi přirozený: k (4.7) se přidá ještě moment síly, kterou pole působí na dipól.

---

[14] Ono je to logické: Na ten z nábojů dipólu, který je v silnějším poli, působí větší síla – takže ho táhne více, než je opačným směrem tažen druhý náboj. Podrobněji viz příklad v Dodatku A.

[15] Vztah platí jak pro dipól konečných rozměrů, tak pro elementární dipól. (Rozmyslete si, proč je tomu tak.)

[16] Moment je samozřejmě nulový, i pokud $\vec{p}$ a $\vec{E}$ míří opačným směrem. Ovšem taková poloha dipólu by byla nestabilní, zatímco když $\vec{p}$ a $\vec{E}$ míří stejným směrem, jde o stabilní rovnováhu. (Rozmyslete si, že moment sil opravdu stáčí dipól k této stabilní rovnovážné poloze; ještě nám to za chvíli potvrdí úvahy o energii dipólu.)

Energie dipólu ve vnějším elektrickém poli

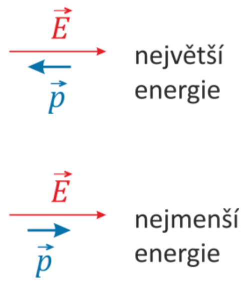
Energie dipólu je součtem energie kladného a záporného náboje:

$$W = Q\varphi(\vec{r}+\vec{d}) - Q\varphi(\vec{r}) = Q\underbrace{\left(\varphi(\vec{r}+\vec{d})-\varphi(\vec{r})\right)}_{\doteq -\vec{d}\cdot\vec{E}} \doteq -Q\vec{d}\cdot\vec{E}\ .^{17} \tag{4.9}$$

Přejdeme-li k elementárnímu dipólu, stane se v limitě $\vec{d}\to 0$ z přibližné rovnosti přesná a energie je dána jednoduchým vztahem

$$\boxed{W = -\vec{p}\cdot\vec{E}\ ,^{18}} \tag{4.10}$$

kde $\vec{p}$ je dipólový moment daného dipólu.



Energie dipólu tedy závisí na jeho natočení vůči elektrické intenzitě, viz obrázek. Pole se snaží natočit dipól do směru, kdy má nejmenší energii, tj. do stejného směru s intenzitou.

Navíc, když už je dipól takto natočen, bude jej pole táhnout do míst, kde má ještě menší energii.[19] Nižší energii má podle (4.10) tam, kde je vyšší intenzita $\vec{E}$ – i z energetických úvah tedy vidíme, že dipól tažen do míst, kde je pole silnější.

Sílu, kterou je dipól tažen, musíme jít určit i z potenciální energie, platí přece mezi nimi vztah $\vec{F} = -\mathrm{grad}\,W$. Po dosazení (4.10) dostaneme

$$\boxed{\vec{F} = \mathrm{grad}\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right)\ .} \tag{4.11}$$

Ale ouha, tento vztah vypadá jinak než vztah (4.5), který jsme pro sílu odvodili výše. Jak je to možné? A který vztah tedy platí? Naštěstí oba – protože jsou ekvivalentní. Dokážeme to v Dodatku B.

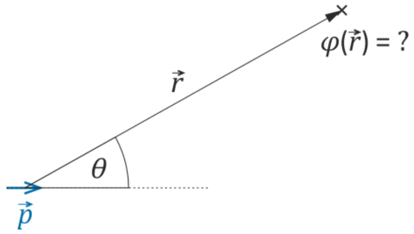
[17] Při úpravě využíváme toho, že rozdíl potenciálů lze určit pomocí intenzity, například tak, že spočteme rozdíl funkčních hodnot ve dvou blízkých bodech: $\varphi(\vec{r}+\vec{d})-\varphi(\vec{r}) \doteq (\mathrm{grad}\varphi)\cdot\vec{d} = -\vec{E}\cdot\vec{d}$. Jinou možností je vyjít z definice potenciálu, z níž plyne $\varphi(\vec{r}+\vec{d})-\varphi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+\vec{d}} \vec{E}\cdot d\vec{r}$. Pro $\vec{d}$ natolik malé, že hodnota $\vec{E}$ je na spojnici $\vec{r}$ a $\vec{r}+\vec{d}$ prakticky konstantní, je hodnota integrálu rovna $\vec{E}\cdot\vec{d}$ (s chybou, která jde k nule pro $\vec{d}\to 0$).

[18] Shrňme si, jak je to s přibližností a přesností tohoto vztahu:

- Pro elementární dipól platí přesně.
- Pro dipól konečných rozměrů obecně dává jen přibližný výsledek,
- ovšem v homogenním poli platí i pro konečný dipól přesně. (Rozmyslete si, proč.)

[19] Podobně jako gravitační pole táhne kámen dolů, tedy do míst, kde má nižší potenciální energii.

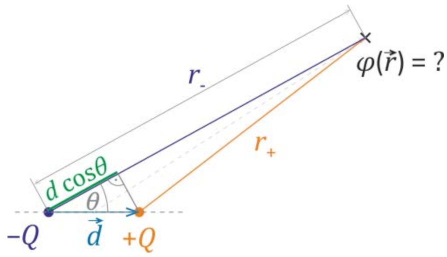
4.2 Pole elementárního dipólu



Pojďme vypočítat, jaké pole ve svém okolí budí elementární dipól o dipólovém momentu $\vec{p}$.[20] Jednodušší, než počítat intenzitu, bude určit potenciál.[21] Budeme ho určovat ve vzdálenosti r od dipólu v bodě, jehož polohový vektor svírá s $\vec{p}$ úhel θ, viz obrázek.

Budeme vycházet z dipólu konečných rozměrů, viz následující obrázek. Vzdálenosti kladného a záporného náboje[22] od místa $\vec{r}$, v němž chceme určit potenciál, označíme r_+ a r_-. Potenciál je dán prostě součtem potenciálů daných bodových nábojů:

$$\varphi(\vec{r}) = k\frac{Q}{r_+} + k\frac{-Q}{r_-} = kQ\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) \qquad (4.12)$$



Teď už jen vhodně upravit tento výraz, udělat limitu $d \to 0$ při $Q\vec{d} = \vec{p}$, a bude hotovo.

Pro výpočet budeme potřebovat rozdíl vzdáleností r_- a r_+. Z obrázku vidíme, že je $r_- - r_+ \doteq d\cos\theta$.[23] Úpravou (4.12) dostáváme

$$\varphi(\vec{r}) = kQ\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = kQ\,\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \doteq kQ\,\frac{d\cos\theta}{r_+ r_-} = k\,\frac{Qd\cos\theta}{r_+ r_-} = k\,\frac{p\cos\theta}{r_+ r_-}\,. \qquad (4.13)$$

V limitě $d \to 0$ přejdou r_- i r_+ prostě do vzdálenosti r od dipólu. Navíc $p\cos\theta$ můžeme zapsat pomocí skalárního součinu: $p\cos\theta = \vec{p}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$. Ze (4.13) pak dostáváme výsledný vztah pro **potenciál elektrického pole elementárního dipólu:**

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = k\,\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\,,} \qquad \text{kde } k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}. \qquad (4.14)$$

Podrobnější odvození pole elementárního dipólu najdete v Dodatku C. Tam je odvozena i intenzita pole dipólu:

$$\boxed{\vec{E} = k\,\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}\,,} \qquad (4.15)$$

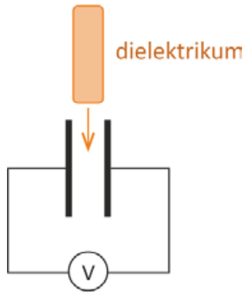
[20] Je to jednak hezký problém sám o sobě a navíc ho využijeme, až budeme zkoumat, jaké elektrické pole generuje spousta malých dipólů v dielektriku. Zde uvedeme jednodušší názorné odvození (v podstatě na středoškolské úrovni), podrobnější odvození zejména pro matematičtěji zaměřené čtenáře si necháme do Dodatku C.

[21] Přece jen je to skalární funkce; u intenzity bychom musely počítat jednotlivé složky. Navíc, když budeme znát potenciál, můžeme z něj už lehce vypočítat intenzitu.

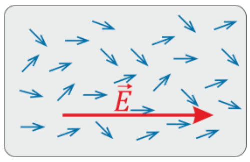
[22] Předpokládáme, že +Q > 0.

[23] Rovnost je jen přibližná, chyba je ale řádu d^2, takže v limitě při přechodu k elementárnímu dipólu bude výsledek přesný; podrobněji viz Dodatek C.

4.3 Polarizace dielektrika



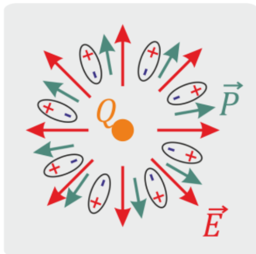
Dielektrikum ovlivňuje elektrické pole. Lze to ilustrovat například jednoduchým pokusem. Vezmeme deskový kondenzátor, mezi jehož deskami je jenom vzduch [24]. Ke kondenzátoru připojíme paralelně voltmetr a kondenzátor nabijeme na napětí U. [25] Když mezi desky kondenzátoru vsuneme dielektrikum, voltmetr ukáže, že se napětí zmenšilo. Nejde přitom o to, že by se kondenzátor zčásti vybil – když dielektrikum vytáhneme, napětí stoupne na původní hodnotu. Toto chování bychom se měli snažit pochopit.



Co se uvnitř dielektrika děje, když ho umístíme do elektrického pole? Jednotlivé dipóly[26] se v látce více či méně natočí ve směru intenzity[27]. Sečteme-li dipólové momenty v kousku dielektrika o objemu ΔV, získáme celkový dipólový moment $\Delta\vec{p}$ tohoto kousku dielektrika. Pro malé kousky bude zřejmě $\Delta\vec{p}$ prakticky úměrné ΔV.[28] Můžeme tedy zavést „hustotu dipólového momentu“:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta V} . ^{29} \qquad (4.16)$$

Tato veličina má vlastní název: říká se jí **polarizace**.[30]



Že polarizace dielektrika ovlivní elektrické pole v něm, názorně ukazuje obrázek vpravo. Představme si, že uvnitř dielektrika je náboj Q. ($Q > 0$) Ten ve svém okolí budí radiální elektrické pole, to natočí dipóly v dielektriku, jak je naznačeno na obrázku. Vidíme, že záporné náboje dipólů se natočily ke (kladnému) náboji Q. To znamená, že celkový kladný náboj uprostřed se *sníží* – a v důsledku toho bude v dielektriku *slabší* elektrické pole.[31] [32]

Tak, a teď to jen popsat formálně a matematicky…

---

[24] Ideální by bylo vakuum, ale to ve třídě těžko zrealizujeme. Vzduch mezi deskami naštěstí vlastnosti kondenzátoru téměř neovlivňuje.

[25] Je potřeba použít elektrostatický voltmetr, s běžným multimetrem pokus nefunguje. (Deskový kondenzátor bude mít kapacitu jen pár desítek pF a multimetr by ho prakticky okamžitě vybil. Jak rychle, to prozkoumáme v jedné z dalších kapitol.)

[26] Tedy polární molekuly, viz výše.

[27] U dielektrika, které není v elektrickém poli, jsou až na výjimky dipóly natočeny nahodile do všech směrů, takže na makroskopické úrovni se jejich účinky ruší. Elektrické pole dipóly „srovnává“ do jednoho směru (jak moc, závisí zřejmě na intenzitě pole, o tom bude ještě řeč dále), takže se jejich účinek projeví.

[28] Rozmyslete si, že tato úvaha není „švindl“.

[29] Samozřejmě s vědomím, že nejde o limitu přesně v matematickém smyslu. Objem ΔV musí zahrnovat hodně molekul; je to podobné, jako když jsme v mechanice zaváděli hustotu.

[30] Termín „polarizace“ se tedy používá ve dvou významech: jednak pro jev (natáčení ev. vznik dipólů v dielektriku, říkáme, že ve vnějším poli se dielektrikum polarizuje) a jednak pro vektorovou veličinu kvantitativně popisující „jak moc se dielektrikum polarizuje“.

[31] Slabší, než by v dané vzdálenosti vyvolal náboj Q ve vakuu.

[32] Tohle vysvětlí i náš pokus s kondenzátorem: Menší elektrická intenzita při stejné vzdálenosti desek znamená menší napětí mezi deskami.

Polarizace dielektrika – matematický popis

Vztah (4.14) určoval potenciál dipólu umístěného v počátku souřadnic. Pro potenciál dipólu, který je v místě $\vec{r}'$, platí analogicky

$$\varphi(\vec{r}) = k\,\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,. \tag{4.17}$$

Potenciál buzený prostorovou hustotou dipólového momentu (tedy polarizací) $\vec{P}$ dostaneme „sečtením příspěvků ze všech kousků dielektrika“, tedy objemovým integrálem[33]

$$\varphi(\vec{r}) = k\int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dV'\,. \tag{4.18}$$

Tento výraz lze upravit.[34] Víme totiž, že $\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\operatorname{grad}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)$.[35] To znamená, že i-tou složku

$\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$ můžeme psát jako $\frac{x_i-x_i'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) = +\frac{\partial}{\partial x_i'}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)$.[36]

Výraz (4.18) pro potenciál lze tedy psát a upravit takto[37]:

$$\varphi(\vec{r}) = k\int_V \frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV' = k\sum_{i=1}^{3}\int_V \frac{P_i(\vec{r}')\cdot(x_i-x_i')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV' = k\sum_{i=1}^{3}\int_V P_i(\vec{r}')\frac{\partial}{\partial x_i'}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)dV' =$$

$$= k\sum_{i=1}^{3}\int_V \left\{\frac{\partial}{\partial x_i'}\left(P_i(\vec{r}')\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) - \frac{\partial P_i(\vec{r}')}{\partial x_i'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right\}dV' = k\int_V \left\{\operatorname{div}\left(\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) - \left(\operatorname{div}\vec{P}(\vec{r}')\right)\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right\}dV' =$$

$$= k\int_V \operatorname{div}\left(\frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)dV' - k\int_V \frac{\operatorname{div}\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' = k\oint_S \frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot\vec{n}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dS' + k\int_V \frac{\left(-\operatorname{div}\vec{P}(\vec{r}')\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

K čemu je nám tato úprava dobrá – jinak řečeno, jak interpretovat získaný výsledek?

---

[33] Srovnejte, jak jsme od potenciálu bodového náboje přešli k potenciálu buzenému objemovým rozložením náboje.

[34] Teď to začne být zajímavé, ale matematicky trochu „výživnější“.

[35] Uvědomte si, že tento vztah se uplatňuje, když z potenciálu pole bodového náboje dostáváme pomocí gradientu intenzitu tohoto pole. Nebo si ho odvoďte přímým výpočtem, třeba pro x-ovou souřadnici: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{-1/2}\right] = -\frac{1}{2}\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{-3/2}\cdot 2(x-x') = -\frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,.$$

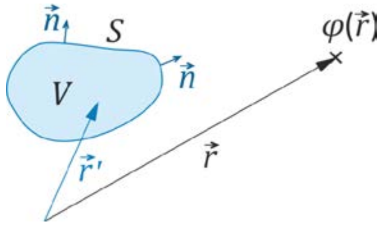
[36] Při derivaci podle x_i' se změní znaménko. (Je to zřejmé např. z výpočtu v předešlé poznámce pod čarou.)

[37] Při úpravě z prvního na druhý řádek jsme využili obrat typu $f\cdot\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(f\cdot g) - \frac{df}{dx}\cdot g$, při úpravě na třetím řádku jsme použili Gaussovu větu matematiky. Plocha S je hranicí objemu V, vektor $\vec{n}$ je normálový vektor k ploše S, míří směrem ven z objemu V. (Tento vektor závisí samozřejmě na místě, je tedy $\vec{n} = \vec{n}(\vec{r}')$.)

Pro přehlednost si přepíšeme, k čemu jsme vlastně došli:

$$\varphi(\vec{r}) = k \oint_S \frac{\vec{P}(\vec{r}')\cdot\vec{n}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dS' + k\int_V \frac{\left(-\operatorname{div}\vec{P}(\vec{r}')\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' \tag{4.19}$$

Potenciál se skládá ze dvou příspěvků: z integrálů přes hranici S dielektrika a přes jeho vnitřek V. Ale přesně takhle jsme počítali potenciál od plošného a objemového rozložení náboje! V čitatelích zlomků v integrálech přitom byly plošná a objemová hustota náboje.



Nabízí se tedy zavést následující veličiny:

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_P &= \vec{P}\cdot\vec{n}\\ \rho_P &= -\operatorname{div}\vec{P}\end{aligned}} \tag{4.20}$$

Vázané náboje

Vztah (4.19) pro potenciál buzený polarizovaným dielektrikem tedy můžeme zapsat jako

$$\varphi(\vec{r}) = k \oint_S \frac{\sigma_P(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dS' + k\int_V \frac{\rho_P(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV' \tag{4.21}$$

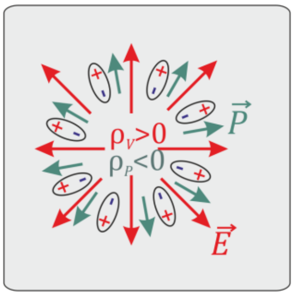
Takže elektrické pole buzené polarizovaným dielektrikem můžeme chápat buď jako pole buzené objemově rozloženou polarizací $\vec{P}(\vec{r})$ (tedy vlastně dipólovými momenty rozmístěnými v dielektriku) nebo ***ekvivalentně*** jako **pole buzené náboji na hranici dielektrika a v jeho objemu** s hustotami (4.20).

> Tyto náboje nemůžeme na dielektrikum přivést ani je z něj odvést [38], říkáme jim proto **vázané náboje**.

Fakticky to znamená, že to, „jak dielektrikum zareaguje" po vložení do elektrického pole, můžeme popsat rozložením polarizace $\vec{P}(\vec{r})$ ***nebo*** vázanými náboji: plošnými s hustotou σ_P a objemovými s hustotou ρ_P. Oba způsoby jsou ekvivalentní a jak jsme viděli, dávají stejné pole buzené polarizovaným dielektrikem.

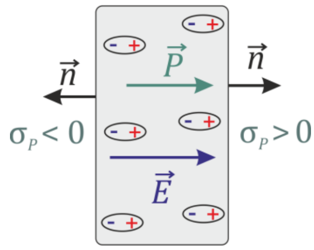
Mají hustoty vázaných nábojů reálný fyzikální smysl? Nebo jde jen o nějaké „formální matematické kouzlo", kterému se nedá názorně rozumět?

Naštěstí se vázané náboje dají pochopit i fyzikálně. Podívejme se nejprve na objemovou hustotu. Jak ukazuje obrázek, díky natočení dipólů se jedny jejich náboje (v situaci na obrázku ty záporné) mohou více koncentrovat v nějaké oblasti (v našem případě u středu obrázku) – a díky tomu tam bude nenulová hustota vázaného náboje. (V našem případě $\rho_P < 0$.)



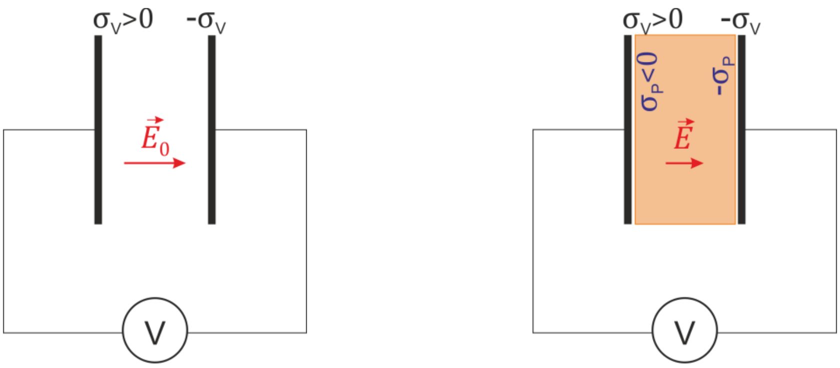
[38] Na rozdíl od nábojů, kterými nabijeme povrch dielektrika, když ho zelektrujeme třením.

Podobně je tomu s plošnou hustotou vázaných nábojů. Situaci opět ukazuje obrázek. Díky natočení dipólů se na hranici dielektrika mohou ocitnout „konce dipólů“, tedy například jejich kladné náboje. (Na našem obrázku je to na pravém okraji dielektrika.) Na jiné části hranice se mohou ocitnout „záporné konce dipólů“ (v obrázku je to na levém okraji). Takže na hranicích dielektrika jsou opravdu náboje. Ale jsou vázané, z dielektrika je pryč neodneseme.[39]



To je rozdíl od nábojů, které jsou na zelektrované tyči – ty mohly například přeskočit jiskřičkou na náš prst nebo jsme jimi mohli nabít kovovou plechovku. Takovéto náboje přirozeně nazýváme **volné**.

Teď už pochopíme pokus s kondenzátorem, do něhož jsme vkládali dielektrikum (viz výše s. 6).



Pokud není mezi deskami kondenzátoru dielektrikum, je elektrická intenzita E_0 mezi deskami dána plošnou hustotou náboje na vnitřní straně desky kondenzátoru. (Platí, že $E_0 = \sigma_V / \varepsilon_0$.[40]) Tento náboj je **volný** náboj.[41] Napětí mezi deskami kondenzátoru je rovno E_0 krát vzdálenost desek.

Když do kondenzátoru vložíme dielektrikum, přibude k hustotě volného náboje na desce ještě plošná hustota **vázaného** náboje σ_P na hranici dielektrika. Ta má ale opačné znaménko, než hustota volného náboje! Takže celková plošná hustota je teď $\sigma = \sigma_V + \sigma_P < \sigma_V$.[42] Elektrická intenzita $E = \sigma / \varepsilon_0$ v dielektriku je tedy menší než původní E_0 – a menší je proto i napětí na kondenzátoru, které ukáže voltmetr.

Po vytažení dielektrika zbyde na deskách kondenzátoru jen volný náboj, takže napětí se vrátí na původní vyšší hodnotu.

[39] Kdybychom z povrchu polarizovaného dielektrika vytrhli celou molekulu, tedy celý dipól, bude celkově neutrální, takže žádný náboj celkově neodneseme.

[40] Připomeňte si (například odvozením pomocí Gaussovy věty) proč tomu tak je.

[41] Na desku kondenzátoru jsme ho přenesli, když jsme kondenzátor nabíjeli.

[42] Hustota volného náboje σ_V se nezměnila, protože volný náboj jsme nikam neodvedli ani žádný nepřivedli. (Poznámka: Toto by přesně platilo, pokud by kondenzátor nebyl nijak ovlivněn připojeným elektrostatickým voltmetrem. V reálném pokusu má voltmetr určitou kapacitu, takže do něj či z něj může nějaký náboj odtéct či přitéct. Při přesném kvantitativním rozboru pokusu bychom s tím museli počítat. Kvalitativní výsledek pokusu to ale neovlivní.)

4.4 Elektrostatické pole v dielektriku

Polarizaci dielektrika už umíme popsat, ať už vektorem polarizace nebo vázanými náboji. Jak ovlivní elektrické pole, jsme však zatím diskutovali spíše kvalitativně. Pojďme se podívat na další veličiny, které nám umožní, abychom se v chování elektrického pole v dielektriku lépe vyznali.

Elektrická indukce

Začneme od rovnice svazující hustotu náboje s intenzitou:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}\left(\varepsilon_0\vec{E}\right) = \rho \tag{4.22}$$

V této rovnici se na pravé straně uplatňují jak volné, tak vázané náboje[43]. Je tedy

$$\rho = \rho_{\mathrm{V}} + \rho_{\mathrm{P}} \ . \tag{4.23}$$

Ovšem $\rho_P = -\operatorname{div}\vec{P}$.[44] Dosazení do (4.23) a pak do (4.22) dá $\operatorname{div}\left(\varepsilon_0\vec{E}\right) = \rho_{\mathrm{V}} + \rho_{\mathrm{P}} = \rho_{\mathrm{V}} - \operatorname{div}\vec{P}$.
Odtud plyne

$$\operatorname{div}\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right) = \rho_{\mathrm{V}} \tag{4.24}$$

Člen v závorce je rozumné zavést jako novou veličinu. Říkáme jí **elektrická indukce**[45]:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}} \tag{4.25}$$

Vztah (4.24) pak má tvar[46]

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{D} = \rho_{\mathrm{V}}} \tag{4.26}$$

Elektrická indukce se tedy chová tak, jako by byla buzena pouze volnými náboji – což se nám často hodí při výpočtu pole v dielektriku. Důsledkem (4.26) je i **analogie Gaussovy věty elektrostatiky pro elektrickou indukci**:

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{\text{volný uvnitř}} \tag{4.27}$$

kde $Q_{\text{volný uvnitř}}$ je veškerý volný náboj[47] v objemu ohraničeném plochou S.

---

[43] Prostě ve vakuu jsou ionty a elektrony a molekuly se svými různě uspořádanými náboji – a všechny tyto náboje budí elektrické pole a tedy vstupují do hustoty ρ.

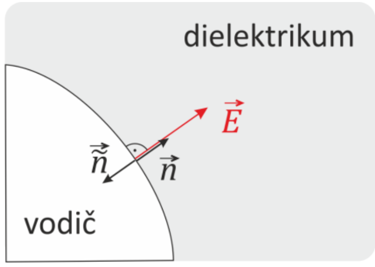
[44] Viz (4.20).

[45] Elektrickou indukci jsme už zavedli výše pro elektrostatické pole ve vakuu jako $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$. (Toto je ve shodě s nynější definicí (4.25); ve vakuu není žádné dielektrikum, které by se polarizovalo, takže je tam $\vec{P} = 0$.)
Ve vakuu šlo ovšem o zavedení spíše formální, elektrickou indukci jsme tam fakticky k ničemu nepotřebovali. V dielektriku, jak uvidíme, bude velmi užitečná.

[46] Má tedy stejný tvar, jako jsme uváděli v případě elektrostatického pole ve vakuu, jen zde vystupuje pouze hustota volného náboje. (Ze (4.26) dostaneme samozřejmě správnou rovnici pro pole ve vakuu, protože ve vakuu jiné než volné náboje nejsou.)

[47] Ať už ve formě bodových nábojů, nabitých křivek či ploch nebo náboje rozloženého s objemovou hustotou.

Vodič v dielektriku a pole u něj



Uvažujme vodič, vně kterého je dielektrikum, viz obrázek. Elektrická intenzita těsně u povrchu vodiče je podle Coulombovy věty rovna

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n} \,, \tag{4.28}$$

kde $\vec{n}$ je normálový vektor k povrchu vodiče; tento vektor míří ven z vodiče, tedy směrem do dielektrika. Úpravou z (4.28) dostaneme

$$\varepsilon_0 \vec{E}\cdot\vec{n} = \sigma \,. \tag{4.29}$$

Plošná hustota náboje σ na hranici vodič-dielektrikum je složena jednak z volného náboje σ_V na povrchu vodiče a jednak z vázaného náboje σ_P na povrchu dielektrika:

$$\sigma = \sigma_\mathrm{V} + \sigma_\mathrm{P} \,. \tag{4.30}$$

Podle (4.20) je

$$\sigma_P = \vec{P}\cdot\vec{\tilde{n}} \,; \tag{4.31}$$

zde jako normálový vektor k hranici dielektrika bereme $\vec{\tilde{n}} = -\vec{n}$, protože musí jít o vektor směřující *ven z dielektrika*. (Viz obrázek.) Dosazení do (4.30) dá

$$\sigma = \sigma_\mathrm{V} + \sigma_\mathrm{P} = \sigma_\mathrm{V} + \vec{P}\cdot\vec{\tilde{n}} = \sigma_\mathrm{V} - \vec{P}\cdot\vec{n} \tag{4.32}$$

Kombinace (4.29) a (4.32) pak dává

$$\varepsilon_0 \vec{E}\cdot\vec{n} = \sigma_\mathrm{V} - \vec{P}\cdot\vec{n} \quad \Rightarrow \quad \left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right)\cdot\vec{n} = \sigma_\mathrm{V} \,,$$

Tento výsledek můžeme jednoduše zapsat pomocí elektrické indukce jako

$$\boxed{\vec{D}\cdot\vec{n} = \sigma_\mathrm{V}} \tag{4.33}$$

To znamená, že těsně u vodiče v dielektriku je normálová složka elektrické indukce rovna hustotě *volného* náboje na povrchu vodiče.

Máme ale zaručeno, že $\vec{D}$ bude také kolmé na povrch vodiče, jako to platí pro $\vec{E}$ u povrchu vodiče ve vakuu? U řady dielektrik ano – pojďme se na taková podívat.

Měkká izotropní dielektrika

Vztah mezi elektrickou intenzitou a polarizací může být obecně složitý. Ovšem u mnoha dielektrik – nazýváme je *měkká izotropní dielektrika* – a naštěstí platí velmi jednoduchá závislost: $\vec{P}$ je přímo úměrné $\vec{E}$:

$$\boxed{\vec{P} = \chi\,\varepsilon_0\vec{E}} \tag{4.34}$$

Konstanta χ se nazývá **elektrická susceptibilita** dané látky; její hodnoty najdeme v tabulkách. Jednoduchou závislost na elektrické intenzitě má pak samozřejmě také elektrická indukce; ze (4.25) a (4.34) plyne

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \underbrace{(1+\chi)}_{\text{označíme } \varepsilon_r} \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \,. \tag{4.35}$$

Zde jsme zavedli konstantu ε_r nazývanou **relativní permitivita**:[48]

$$\boxed{\varepsilon_r = 1+\chi} \tag{4.36}$$

Součin relativní permitivity a permitivity vakua,

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \,,} \tag{4.37}$$

se pak nazývá prostě **permitivita** daného prostředí. [49]

Z (4.35) a (4.37) pak vidíme, že elektrická indukce v měkkém homogenním dielektriku souvisí s $\vec{E}$ jednoduchým známým vztahem

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}} \tag{4.38}$$

V měkkém izotropním dielektriku proto platí, že z řady vztahů pro elektrostatické pole ve vakuu dostaneme vztahy platné pro pole v dielektriku prostě tím, že místo permitivity vakua ε_0 napíšeme permitivitu prostředí ε .

Příklady:

1) Intenzita pole vně vodivé sféry nabité nábojem Q v měkkém izotropním dielektriku je

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \,. \tag{4.39}$$ [50]

2) Kapacita deskového kondenzátoru o ploše desek S, jejichž vzdálenost je d a mezi nimiž je dielektrikum o relativní permitivitě ε_r je

$$C = \varepsilon \frac{S}{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} \,. \tag{4.40}$$

To znamená, že kondenzátor, v němž je mezi deskami dielektrikum, má ε_r -krát vyšší kapacitu, než když je mezi deskami vakuum. Relativní permitivita keramických dielektrik může dosahovat hodnot několika stovek až několika tisíc – takové zvýšení kapacity už stojí za to!

No není krásné, že pro pole v měkkém izotropním dielektriku platí tak jednoduché vztahy jako jsou (4.39) a (4.40)? [51]

---

[48] Připomeňme, že susceptibilita i relativní permitivita jsou bezrozměrné veličiny.

[49] Pro vakuum je samozřejmě $\varepsilon_r = 1$, takže $\varepsilon = \varepsilon_0$.

[50] Umíte napsat vztah pro potenciál tohoto pole? (Jistěže ano…)

[51] Odvoďte si prosím sami, že tyto vztahy opravdu platí. (Ne abyste se jen se slepou důvěrou učili nazpaměť!) Nápověda: Připomeňte si, jak jsme analogické vztahy ve vakuu odvozovali pomocí Gaussovy věty. (Tedy pardon, když jsme je odvozovali, tak jsme nebyli ve vakuu, na tak dlouho bych dech zadržet nedokázal, a taky by mě ve vakuu při přednášce nebylo slyšet. ☺)

… a dielektrika jiná

Jen pro úplnost, abychom si nemysleli, že všechna dielektrika se polarizují tak jednoduše, jak jsme uvedli dříve:

- V anizotropních dielektrikách nemá obecně polarizace stejný směr jako elektrická intenzita. Přesto v nich mohou být složky $\vec{P}$ úměrné složkám $\vec{E}$. (Jaký charakter pak mají elektrické susceptibilita a relativní permitivita?[52])
- V tzv. feroelektrikách není závislost mezi $\vec{E}$ a $\vec{P}$ lineární.[53]
- **Elektrety** jsou materiály, v nichž $\vec{P} \neq 0$ i bez přítomnosti vnějšího elektrického pole. Jsou elektrickou analogií permanentních magnetů. Dají se připravit tuhnutím pryskyřic v silném elektrickém poli. Ve svém okolí vytváření elektrické pole. Využívají se například v elektretových mikrofonech.

Plus malá douška na závěr

Abychom nezapomněli na ten nejjednodušší základní pokus z elektrostatiky:

Proč tedy nabitá tyč přitáhne i nenabité papírky?
A proč se zelektrované brčko drží i na nenabité stěně?

Vysvětlení už teď jistě dáme dohromady. (Zkuste je zformulovat sami dřív, než se podíváte na poznámku pod čarou[54].)

---

[52] Správně, jsou to tenzory druhého řádu. Platí $P_i = \sum_{j=1}^{3} \chi_{ij} E_j$.

[53] Navíc tato závislost vykazuje *hysterezní smyčku*, blíže o analogickém jevu v kapitole o magnetech.
U feroelektrik se také objevuje *piezoelektrický jev* – při mechanickém namáhání piezokrystalů na jejich povrchu vzniká elektrické napětí. Využívá se v piezo zapalovačích plynu, z toho vidíme, že vzniklé napětí může být velmi vysoké. V minulosti se toho jevu využívalo také v levných součástkách pro snímání kmitů jehly v drážce gramofonové desky. Naopak při přivedení napětí se piezoelektrické krystaly mechanicky deformují – toto se využívá v piezoreproduktorech (většinou jde o levné „bzučáky“).

[54] Nabitá tyč ve svém okolí vytváří elektrické pole. Pod vlivem tohoto pole se papírky a jiné malé nevodivé předměty polarizují. Získají tedy dipólový moment – a jak víme, dipóly jsou vtahovány do míst, kde je pole silnější, tedy směrem k tyči. (Rozmyslete si, že dipól vzniklý polarizací má vůči elektrické intenzitě správnou orientaci, aby byl do silnějšího pole vtahován.)

A ještě trochu jednodušší vysvětlení: Na papírku vzniknou polarizací vázané náboje. Je-li tyč záporně nabitá, pak v místech papírku, která jsou blíže k tyči, budou vázané náboje kladné, ve vzdálenějších místech papírku náboje záporné. A protože intenzita pole tyče klesá se vzdáleností, tak na náboje, které jsou blíž, působí větší síla…

A proč drží nabité brčko na nevodivé stěně? Díky jeho elektrickému poli se polarizuje materiál stěny, na povrchu stěny tedy budou vázané náboje opačné polarity, než má brčko… a víc už to zde asi komentovat netřeba.

Shrnutí

Síla působící na dipól v elektrickém poli:

$$\vec{F} = (\vec{p}\cdot\mathrm{grad})\vec{E} \equiv (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E} = \sum_{i=1}^{3} p_i \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x_i}$$

Ekvivalentní vyjádření: $\vec{F} = \mathrm{grad}\left(\vec{p}\cdot\vec{E}\right)$

Moment síly na dipól:

$$\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E}$$

(v nehomogenním poli se pro moment síly vůči počátku přičte člen $\vec{r}\times\vec{F}$)

Energie dipólu v elektrickém poli:

$$W = -\,\vec{p}\cdot\vec{E}$$

Pole elementárního dipólu:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$$

Polarizace dielektrika a vázané náboje:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta V} \qquad \rho_P = -\,\mathrm{div}\,\vec{P} \qquad \sigma_P = \vec{P}\cdot\vec{n}$$

Elektrická indukce:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \qquad \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho_{\mathrm{V}} \qquad \vec{D}\cdot\vec{n} = \sigma_{\mathrm{V}}$$ (u povrchu vodiče)

Měkká izotropní dielektrika:

$\vec{P} = \chi\,\varepsilon_0\vec{E}$ $\qquad$ $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, kde $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ a $\varepsilon_r = 1+\chi$

χ ... elektrická susceptibilita, ε_r ... relativní permitivita, obě jsou bezrozměrné
ε ... permitivita dielektrika

Kapacita deskového kondenzátoru, kde mezi deskami je dielektrikum:

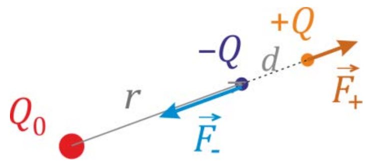
$$C = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{S}{d}$$

Elektrety:

$$\vec{P} = \text{konst.}$$

Dodatek 4.A: Síla mezi bodovým nábojem a dipólem

Bodový náboj o velikosti $Q_0 > 0$ kolem sebe budí elektrostatické pole. V něm se nachází dipól tvořený náboji $+Q$ a $-Q$, viz obrázek. (Je $Q > 0$, takže dipól se natočí tak, jak to vidíme na obrázku.) Jaká síla působí na dipól?



Náboj $-Q$ je ve vzdálenosti r od náboje Q_0 , je tedy k němu přitahován silou velikosti $F_- = k\dfrac{Q_0 Q}{r^2}$. Náboj $+Q$ je od Q_0 ve vzdálenosti r+d, je tedy od něj odpuzován silou $F_+ = k\dfrac{Q_0 Q}{(r+d)^2}$. Celková síla působící na dipól v radiálním směru (tj. směrem od náboje Q_0) je

$$F_r = F_+ - F_- = kQ_0 Q\left(\frac{1}{(r+d)^2} - \frac{1}{r^2}\right) = kQ_0 Q\frac{r^2-(r+d)^2}{(r+d)^2\cdot r^2} = -kQ_0 Q\frac{2rd+d^2}{(r+d)^2\cdot r^2} . \tag{4.41}$$

Radiální složka síly je záporná, to znamená, že dipól je **přitahován** k náboji Q_0, je tedy vtahován do míst, kde je elektrické pole silnější.[55]

Z výsledku (4.41) přepsaného do tvaru $F_r = -kQ_0\dfrac{2r\cdot Qd + d\cdot Qd}{(r+d)^2\cdot r^2} = -kQ_0\dfrac{2r\cdot p + d\cdot p}{(r+d)^2\cdot r^2}$ lze lehce dostat sílu, kterou je přitahován elementární dipól: prostě bereme p = konst. a d = 0. Výsledkem je

$$F_r = -2k\frac{Q_0\, p}{r^3} = -\frac{Q_0\, p}{2\pi\varepsilon_0 r^3} . \tag{4.42}$$

Stejný výsledek dostaneme ze vztahu $\vec{F} = (\vec{p}\cdot \mathrm{grad})\vec{E}$. Dipólový moment $\vec{p}$ míří v radiálním směru, takže $\vec{p}\cdot\mathrm{grad} = p\dfrac{d}{dr}$.[56] Radiální složka intenzity je $E_r = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q_0}{r^2}$, takže

$$F_r = (\vec{p}\cdot\mathrm{grad})E_r = p\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{r^2}\right) = -\frac{Q_0\, p}{2\pi\varepsilon_0 r^3} . \tag{4.43}$$

Všimněte si, že zatímco síla mezi dvěma bodovými náboji klesala se vzdáleností jako $\dfrac{1}{r^2}$,

síla mezi bodovým nábojem a dipólem klesá jako $\dfrac{1}{r^3}$.

Jak asi bude klesat síla mezi dvěma dipóly? (Odvoďte si sami, že klesá jako $\dfrac{1}{r^4}$.)

---

[55] Rozmyslete si, že stejně tak by byl dipól (natočený tak, aby jeho dipólový moment měl stejný směr jako elektrická intenzita) přitahován i v případě, kdy by náboj Q_0 byl záporný.

[56] Rozmyslete si, že to je pravda. Může vám pomoci, když si zvolíte soustavu souřadnic tak, že od Q_0 směrem k dipólu povede osa x, pak bude $\vec{p} = (p,0,0)$ a $\vec{p}\cdot\mathrm{grad} = (p,0,0)\cdot\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right) = p\dfrac{d}{dx}$. (Vzhledem k tomu, že podstatná je zde už jen proměnná x, píšeme tu už obyčejnou derivaci.)

Dodatek 4.B: Dva vzorce pro sílu působící na dipól

Vztahy (4.4) resp. (4.5) dávají pro sílu, kterou elektrické pole působí na elementární dipól, $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \mathrm{grad})\vec{E} = \sum_{j=1}^{3} p_j \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x_j}$, ve složkách tedy

$$F_i = \sum_{j=1}^{3} p_j \cdot \frac{\partial E_i}{\partial x_j} . \tag{4.44}$$

Vztah (4.11) odvozený z energie dipólu v elektrickém poli, ale vypadá jinak: $\vec{F} = \mathrm{grad}\left(\vec{p} \cdot \vec{E}\right)$, čili ve složkách:

$$F_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{3} p_j E_j\right) . \tag{4.45}$$

Ukážeme, že oba vztahy jsou ekvivalentní. Intenzita elektrostatického pole je totiž svázána s potenciálem vztahem $\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi$, čili složka intenzity je $E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$. Dosazení do (4.44) dá

$$F_i = \sum_{j=1}^{3} p_j \cdot \frac{\partial E_i}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{3} p_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = -\sum_{j=1}^{3} p_j \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} . \tag{4.46}$$

Dosazení $E_j = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ do (4.45) dá

$$F_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{3} p_j E_j\right) = \sum_{j=1}^{3} p_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = -\sum_{j=1}^{3} p_j \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} . \tag{4.47}$$

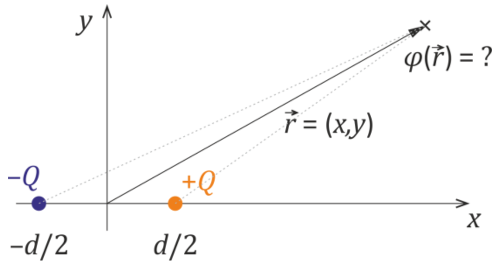
Oba výsledky se liší jen pořadím druhých derivací – ovšem, jak nás učí matematická analýza, druhé derivace za příslušných podmínek, které zde bereme za splněné[57], nezáleží na pořadí.

Oba vztahy pro sílu, byť na první pohled různé, tedy dávají stejný výsledek.

[57] Druhé derivace musí existovat a být spojité, což je fyzikálně „rozumné“. (Fakticky to znamená, že derivace intenzity jsou spojité, tedy že se intenzita mění „hladce“. Vně bodových nábojů, nabitých křivek a ploch je toto splněno.)

Dodatek 4.C: Podrobnější odvození pole elementárního dipólu

Chceme spočítat potenciál dipólu v místě určeném polohovým vektorem $\vec{r} = (x, y)$.[58] Počátek soustavy souřadnic volíme ve středu dipólu, viz obrázek. Dipól je tvořen náboji $-Q$ a $+Q$; jejich polohové vektory, jak je vidět z obrázku, jsou $\vec{r}_- = (-d/2, 0)$ a $\vec{r}_+ = (d/2, 0)$. Vzdálenost nábojů je tedy d a velikost dipólového momentu daného dipólu je $p = Q \cdot d$.[59]



Potenciál v místě $\vec{r}$ je prostě součtem potenciálů bodových nábojů:

$$\varphi(\vec{r}) = k\left(\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_+|} - \frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}_-|}\right) = kQ\left(\frac{1}{\sqrt{(x-d/2)^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d/2)^2+y^2}}\right) =$$
$$= kQ\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - d\cdot x + d^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + d\cdot x + d^2 + y^2}}\right) \tag{4.48}$$

Platí, že $x^2 + y^2 = r^2$.[60] (4.48) tedy můžeme přepsat na

$$\varphi(\vec{r}) = kQ\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - d\cdot x + d^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + d\cdot x + d^2}}\right) = \frac{kQ}{r}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{d\cdot x}{r^2} + \left(\frac{d}{r}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{d\cdot x}{r^2} + \left(\frac{d}{r}\right)^2}}\right) \tag{4.49}$$

Tento vztah dále upravíme pro $d \ll r$.[61] Ve výsledku budeme chtít ponechat jen členy prvního řádu v d (rozmyslete si, proč[62]), všechny členy vyššího řádu zanedbáme. Členy $(d/r)^2$ v odmocninách zanedbáme rovnou, pro úpravu zlomků s odmocninami využijeme vztah

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \doteq 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{platný pro } \varepsilon \ll 1.\text{[63]} \tag{4.50}$$

Z (4.49) dostaneme

$$\varphi(\vec{r}) \doteq \frac{kQ}{r}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{d\cdot x}{r^2} - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{d\cdot x}{r^2}\right)\right) = k\frac{Qd\cdot x}{r^3} = k\frac{p\cdot x}{r^3}, \tag{4.51}$$

tedy výsledek totožný s (4.14). (Po přechodu k elementárnímu dipólu se z přibližné rovnosti stane přesná. Protože $\vec{p} = (p, 0, 0)$, je $p \cdot x = \vec{p} \cdot \vec{r}$.)

---

[58] Potenciál vypočteme v rovině z=0, proto nepíšeme z-ové složky souřadnic. Díky osové symetrii kolem osy x budeme znát potenciál ve všech bodech prostoru. (Rozmyslete si, jak byste někomu vysvětlili, že to je pravda.)

[59] Začínáme s dipólem konečných rozměrů, v průběhu odvození přejdeme limitou $d \to 0$ při p = konst. k elementárnímu dipólu.

[60] Přitom $r = |\vec{r}|$ je vzdálenost bodu, kde určujeme potenciál, od středu dipólu.

[61] Tedy pro případ, kdy počítáme pole daleko od dipólu. Ostatně, nakonec budeme provádět limitu $d \to 0$.

[62] Součin $Qd = p$ bude při limitě k elementárnímu dipólu konstantní. Všechny členy vyššího řádu půjdou k nule; například $Qd^2 = p \cdot d \to 0$ pro $d \to 0$.

[63] Tento vztah dostaneme jako začátek Taylorova rozvoje. Ostatně, Taylorův rozvoj bychom mohli použít přímo při úpravách výsledku (4.49). Proměnná by byla d, rozvíjeli bychom kolem bodu d = 0 – kdo máte chuť, tak si to zkuste.

Potenciál v celém prostoru dostaneme jednoduchým zobecněním[64]

$$\varphi(x,y,z) = k\,\frac{p\cdot x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\ , \tag{4.52}$$

pro dipól mířící obecným směrem pak

$$\varphi(x,y,z) = k\,\frac{p_x\cdot x + p_y\cdot y + p_z\cdot z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\ . \tag{4.53}$$

Složky elektrické intenzity odtud získáme jednoduše parciálním derivováním podle proměnných,

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \dots$$

Například pro *x*-ovou složku intenzity dá výpočet

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left[k\,\frac{p_x x + p_y y + p_z z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\right] = -k\,\frac{p_x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2} - \left(p_x x + p_y y + p_z z\right)\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2} 2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3} =$$

$$= k\,\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\,x - p_x\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} = k\,\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\,x - r^2 p_x}{r^5}$$

Analogicky je to pro *y*-ovou a *z*-ovou složku. Ve vektorovém tvaru můžeme zapsat výsledek jako

$$\boxed{\vec{E} = k\,\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}\ ,} \tag{4.54}$$

kde, samozřejmě, $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

[64] S využitím výše zmíněné válcové symetrie kolem osy x.