Pole uvnitř homogenně nabité sféry v případě, že by intenzita od nábojů neklesala jako $1/r^2$, ale jako $1/r^{2+\varepsilon}$

(L. Dvořák, 2010)

Podle Coulombova zákona na sebe dva bodové náboje Q a q působí silou $F = k\dfrac{Qq}{r^2}$, kde $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ a r je vzdálenost nábojů. Intenzita bodového náboje Q (resp. její složka v radiálním směru) ve vzdálenosti r je tedy $E_r = k\dfrac{Q}{r^2}$. Má-li být mocnina u r nikoli 2 ale $2+\varepsilon$, musí mít vztah pro intenzitu tvar

$$E_r = k\frac{Q}{r^2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\varepsilon} \qquad (1)$$

kde r_0 je nějaká pevná délka. (Toto r_0 musíme do vzorce zavést, aby vycházel rozměrově. Pro $r = r_0$ je síla mezi náboji stejná, jako podle „klasického" Coulombova zákona.)

I v případě „modifikovaného" Coulombova zákona s intenzitou (1) jde o konzervativní pole, tudíž k němu existuje potenciál φ. Pole je navíc centrální, takže potenciál závisí jen na vzdálenosti r od náboje Q. Potenciál získáme z intenzity integrací:

$$\varphi = -\int E_r \mathrm{d}r = -kQr_0^{\varepsilon}\int r^{-(2+\varepsilon)}\mathrm{d}r = kQr_0^{\varepsilon}\frac{r^{-(1+\varepsilon)}}{1+\varepsilon} + C$$

Integrační konstantu C můžeme zvolit rovnou nule, takže potenciál bodového náboje pro modifikovaný Coulombův zákon je

$$\varphi = k\frac{Q}{r}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\varepsilon}\frac{1}{1+\varepsilon}. \qquad (2)$$

Platí princip superpozice, takže potenciál plochy S nabité s hustotou náboje σ získáme integrací:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{k\,r_0^{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\int_S \frac{\sigma\,\mathrm{d}S'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^{1+\varepsilon}}.$$

Vypočteme potenciál uvnitř homogenně nabité sféry poloměru R o celkovém náboji Q. Hustota náboje je $\sigma = Q/(4\pi R^2)$, plochou S je daná sféra, kterou budeme parametrizovat sférickými souřadnicemi θ a ϕ. (Počátek souřadnic bereme ve středu sféry.) Potenciál závisí jen na vzdálenosti r od počátku; budeme jej počítat pro bod na ose z, jeho vzdálenost označíme jako a. Z kosinové věty plyne $|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}$. (Vše je podobné jako při výpočtu potenciálu homogenně nabité sféry v „normální" elektrostatice, takže zde nepopisujeme úplně všechny detaily výpočtu.)

Potenciál je tedy v našem případě dán konkrétně vztahem

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{k\,r_0^{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sigma R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi}{\left(\sqrt{R^2+a^2-2Ra\cos\theta}\right)^{1+\varepsilon}} \qquad (3)$$

Integrace přes ϕ se redukuje násobení 2π, takže (po dosazení za σ) dostaneme z (3):

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{k\,Q\,r_0^{\varepsilon}}{2(1+\varepsilon)} \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(R^2+a^2-2Ra\cos\theta\right)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}\,. \tag{4}$$

Při dalším výpočtu můžeme postupovat naprosto stejně jako v analogické úloze v „normální“ elektrostatice. Provedeme substituci $\xi = R^2+a^2-2Ra\cos\theta$, takže ze (4) dostaneme

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \frac{k\,Q\,r_0^{\varepsilon}}{2(1+\varepsilon)}\,\frac{1}{2Ra}\int_0^{\pi}\frac{2Ra\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\left(R^2+a^2-2Ra\cos\theta\right)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} = \frac{k\,Q\,r_0^{\varepsilon}}{4Ra(1+\varepsilon)}\int_{(R-a)^2}^{(R+a)^2}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} = \\ &= \frac{k\,Q\,r_0^{\varepsilon}}{4Ra(1+\varepsilon)}\,\frac{2}{1-\varepsilon}\left[\xi^{\frac{1+\varepsilon}{2}}\right]_{(R-a)^2}^{(R+a)^2} = \frac{k\,Q\,r_0^{\varepsilon}}{2Ra(1-\varepsilon^2)}\left[(R+a)^{1-\varepsilon}-(R-a)^{1-\varepsilon}\right]\end{aligned} \tag{5}$$

Připomeňme, že počítáme pole uvnitř sféry, takže $R-a\geq 0$. Místo $\varphi(\vec{r})$ budeme nadále psát jen $\varphi(a)$; tak bude jasně vyjádřeno, že potenciál závisí jen na vzdálenosti od středu sféry. Vztah (5) můžeme upravit na

$$\varphi(a) = k\frac{Q}{R}\,\frac{1}{1-\varepsilon^2}\left(\frac{r_0}{R}\right)^{\varepsilon}\frac{(1+\frac{a}{R})^{1-\varepsilon}-(1-\frac{a}{R})^{1-\varepsilon}}{2\frac{a}{R}} = k\frac{Q}{R}\,\frac{1}{1-\varepsilon^2}\left(\frac{r_0}{R}\right)^{\varepsilon} f\left(\frac{a}{R}\right), \tag{6}$$

kde funkci vyjadřující závislost potenciálu na vzdálenosti od středu sféry jsme označili f:

$$f(x) = \frac{(1+x)^{1-\varepsilon}-(1-x)^{1-\varepsilon}}{2x} \tag{7}$$

Přitom $x = a/R$, takže $0\leq x\leq 1$.

Na sféře samotné, tedy pro $a = R$, je potenciál

$$\varphi(R) = k\frac{Q}{R}\,\frac{1}{1-\varepsilon^2}\left(\frac{r_0}{R}\right)^{\varepsilon} f(1) \tag{8}$$

Vztah (6) pro potenciál uvnitř sféry můžeme s využitím (8) přepsat na

$$\varphi(a) = \varphi(R)\,\frac{f\left(\frac{a}{R}\right)}{f(1)}\quad. \tag{9}$$

Hodnotu funkce f v bodě 1 můžeme samozřejmě lehce určit přímým dosazením do (7); je to $2^{-\varepsilon}$. Podobně bychom pro pevné $x = a/R$ mohli určit hodnotu čitatele ve zlomku v (9). Explicitní závislost $\varphi(a)$ na ε však bude zbytečně komplikovaná.

Příslušný vztah však můžeme zjednodušit v případě, který je pro nás důležitý: v případě, kdy **ε je malé**, $|\varepsilon|\ll 1$. (Již přímé proměření síly mezi dvěma nabitými kuličkami ukazuje, že $|\varepsilon|$ je menší než několik procent, takže předpoklad, že ε je malé, je splněn.)

Uvědomíme-li si, že

$$a^{\varepsilon} = \left(e^{\ln a}\right)^{\varepsilon} = e^{\varepsilon\ln a} \doteq 1+\varepsilon\ln a\,,$$

můžeme upravit např. $(1+x)^{1-\varepsilon}$ na $(1+x)^{1-\varepsilon} = (1+x)\cdot(1+x)^{-\varepsilon} \doteq (1+x)\cdot\big(1-\varepsilon\ln(1+x)\big)$; podobně upravíme $(1-x)^{1-\varepsilon}$. Pro $|\varepsilon| \ll 1$ pak ze (7) dostaneme

$$\begin{aligned} f(x) &\doteq \frac{1}{2x}\Big[(1+x)\cdot\big(1-\varepsilon\ln(1+x)\big)-(1-x)\cdot\big(1-\varepsilon\ln(1-x)\big)\Big] \\ &= \frac{1}{2x}\Big\{2x-\varepsilon\big[(1+x)\cdot\ln(1+x)-(1-x)\cdot\ln(1-x)\big]\Big\} = \\ &= 1-\varepsilon\cdot g(x) \end{aligned}, \tag{10}$$

kde

$$g(x) = \frac{(1+x)\cdot\ln(1+x)-(1-x)\cdot\ln(1-x)}{2x}\ . \tag{11}$$

Po dosazení (10) do (9) a po úpravě získáme

$$\begin{aligned} \varphi(a) &\doteq \varphi(R)\frac{1-\varepsilon\, g(a/R)}{1-\varepsilon\, g(1)} \doteq \varphi(R)\big(1-\varepsilon\, g(a/R)\big)\big(1+\varepsilon\, g(1)\big) \\ &\doteq \varphi(R)\Big[1+\varepsilon\big(g(1)-g(a/R)\big)\Big] \end{aligned}.$$

Odtud dostáváme rozdíl potenciálů v bodě ve vzdálenosti a od středu a na povrchu sféry jako

$$\varphi(a)-\varphi(R) \doteq \varepsilon\big(g(1)-g(a/R)\big)\varphi(R)\,. \tag{12}$$

Z (11) můžeme určit, že $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ a $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \ln 2 \doteq 0{,}693$. Funkce $g(x)$ s x rostoucím od nuly nejprve klesá velmi pozvolně; ještě pro $x = 0{,}7$ má hodnotu asi 0,9. Hodnota $g(1)-g(a/R)$ je tedy pro $0 \le a < 0{,}7R$ v rozmezí asi -0,2 až -0,3.

Pozn.: Korekce zpřesňující vztah (12) by byly řádu ε^2, zde je nebudeme uvažovat.

Závěr:

Pokud se v modifikovaném Coulombově zákoně exponent odlišuje od 2 jen o ε, které je malé ($|\varepsilon| \ll 1$), je rozdíl potenciálů uvnitř homogenně nabité sféry ve vzdálenosti a od středu ($\varphi(a)$) a na samotné sféře ($\varphi(R)$) v prvním přiblížení přímo úměrný ε; přitom je také úměrný potenciálu $\varphi(R)$ na sféře:

$$\varphi(a)-\varphi(R) \doteq -C(a)\,\varepsilon\,\varphi(R)\,, \tag{13}$$

kde faktor úměrnosti C je v rozmezí asi 0,2 až 0,3 (pro $a < 0{,}7R$).

Poznámka:

Podobnou závislost rozdílu potenciálů dostaneme z numerických výpočtů pro homogenně nabitý povrch dlouhého válce, pokud by platil výše uvedený modifikovaný Coulombův zákon.

Lze tedy soudit, že i pro jiné uzavřené nabité plochy (kde neumíme pole jednoduše explicite spočítat) by zřejmě rozdíl potenciálů uvnitř nabité plochy a na ploše samotné mohl zhruba odpovídat vztahu (13), kde faktor C by byl řádu 0,1. Měříme-li rozdíl potenciálů uvnitř vodivé nabité plochy a na této ploše, lze tedy z (13) odhadnout maximální možnou velikost ε.